Probabilités conditionnelles, cours, première spécialité Mathématiques

F.Gaudon

30 juin 2019

Table des matières

1 Notion de probabilité conditionnelle

Définition :

Pour tout événement A non impossible et tout événement B, on appelle *probabilité conditionnelle de B sachant A* et notée $P_A(B)$ le nombre

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A}$$

Exemple :

Lors d'un sondage, 50% personnes des interrogées déclarent pratiquer un sport régulièrement et 75% des personnes interrogées déclarent aller au cinéma régulièrement. De plus, 40% des personnes déclarent faire du sport et aller au cinéma régulièrement. On interroge à nouveau une de ces personnes au hasard et on considère les événements « la personne interrogée pratique un sport régulièrement » et « la personne interrogée va au cinéma régulièrement » que l'on notent S et C respectivement. On cherche à calculer la probabilité que la personne pratique un sport régulièrement sachant qu'elle va régulièrement au cinéma.

On a $P(C) = 0,75$ et $P(S \cap C) = 0,4$. Donc $P_C(S) = \frac{P(S\cap C)}{P(C)} = \frac{0,4}{0,75} \approx 0,53$.

Propriété :

Soient A et B deux événements non impossibles d'un univers donné. La connaissance de la probabilité d'un événement B et de la probabilité conditionnelle d'un événements A sachant B permet de retrouver la probabilité $P(A \cap B)$ de l'intersection de A et B avec la formule

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

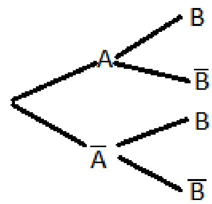
.

Propriétés :

Pour tous les événements A et B tels que $P(A) \neq 0$:

- $P_A(A) = 1$;
- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$;
- Si A et B sont des événements incompatibles (c'est à dire ne pouvant pas se réaliser simultanément ou encore tels que $A \cap B = \emptyset$) alors $P_A(B) = 0$.

2 Arbre pondérés



Définition :

Le schéma ci-dessus est appelé *arbre pondéré* ou *arbre à probabilités*. Il comporte 4 *chemins* : $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$. Un *noeud* est un point d'où partent plusieurs branches.

Propriété :

Dans un *arbre pondéré* ou *arbre à probabilités* comme ci-dessus,

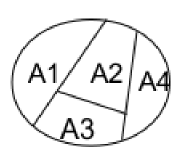
- La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1 (par exemple, $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$) ;
- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches (par exemple, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$) ;

3 Partitions et formule des probabilités totale

Définition :

Soient A_1, A_2, ..., A_n pour $n \geq 1$ des parties non vides d'un ensemble E. On dit que A_1, A_2, ..., A_n forment *une partition* de E si les deux conditions suivantes sont vérfiées

- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$;
- pour tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$ et tout $j \in \{1; 2; ...; n\}$ avec $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$.



Formule des probabilités totales :

Si A_1, A_2, ..., A_n forment une partition d'un univers E, alors pour tout événement A de l'univers E :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n)$$

ou encore

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P_(A_2)P_{A_2}(B) + ... + P(A_n)P_{A_n}(B)$$

En particulier, pour tout événement B,

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$$

Remarque :
Sur l'arbre pondéré du paragraphe précédent, la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui le compose (par exemple, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$).

4 Indépendance d'événements

Définition :

On dit que deux événements A et B sont *indépendants* lorsque

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Remarque :
Si $P(A) \neq 0$ alors deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ si et seulement si $P_B(A) = P(A)$ avec $P(B) \neq 0$, ce qui signifie que la probabilité que l'un des deux événements se réalise ne dépend pas de la probabilité que l'autre se réalise.

Exemple :
On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. On appelle A l'événement « on tire un as », T l'événement « on tire un trèfle » et N l'événement « on tire une carte noire ». On a $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{8}$ et $P(N) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

D'une part $A \cap T$ est l'événement « on tire l'as de trèfle » et $P(A)P(T) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$ qui est bien égal à $P(A \cap T)$ ce qui montre que A et T sont indépendants.

D'autre part, $T \cap N$ est l'événement « on tire un trèfle et une carte noire » dont la probabilité est $\frac{1}{4}$ mais on a $P(T)P(N) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq P(T \cap N)$ ce qui confirme que les événements T et N ne sont évidemment pas indépendants.

Propriété $\odot$:

Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants.

Preuve :
Si A et B sont indépendants dans un univers E alors $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. $\bar{A}$ et B sont indépendants si et seulement si $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P(B)$. Or $P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$ d'après la formule des probabilités totales. D'où $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B)$ par indépendance de A et B. Donc $P(\bar{A} \cap B) = (1 - P(A))P(B) = P(\bar{A})P(B)$. D'où l'indépendance de $\bar{A}$ et B.

5 Succession d'épreuves indépendantes

Définition :

Lorsque l'on tire au hasard et successivement des objets dans un ensemble, on dit que les tirages sont avec remise si chaque objet est remis dans l'ensemble avant le tirage suivant. Les épreuves qui constituent une expérience aléatoire sont alors dites identiques et indépendantes.

propriété :

La probabilité d'un événement constitué de tirages indépendants est le produit des probabilités de chacun des résultats.