Fonctions dérivées, cours, première, spécialité Mathématiques

F.Gaudon

30 juin 2019

Table des matières

1 Nombre dérivé

On considère une fonction f définie sur un intervalle I non vide ainsi que deux réels x_A et h avec $h \neq 0$ tels que $x_A \in I$ et $x_A + h \in I$.

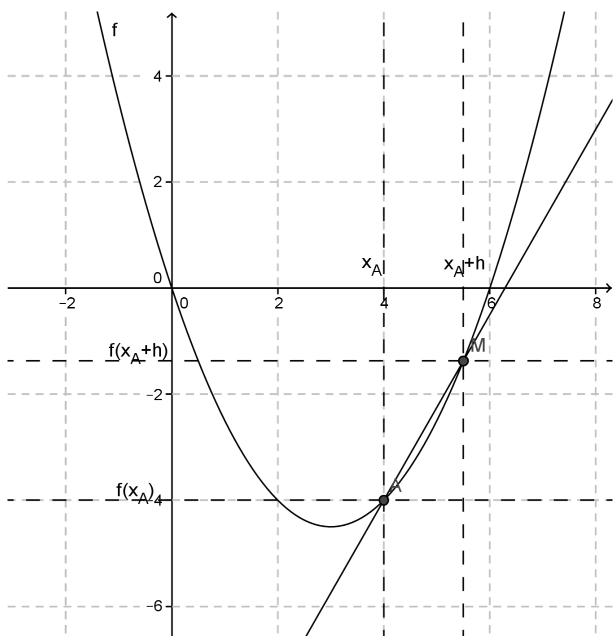
Définition :

Le *taux d'accroissement* de f entre x_A et $x_A + h$ est le nombre :

$$\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h}$$

définition :

Lorsque le taux d'accroissement tend vers un réel quand h tend vers 0, on dit que f admet un *nombre dérivé en x_A*. Ce nombre dérivé est noté $f'(x_A)$. On dit aussi que f *est dérivable en x_A*.



Exemple de savoir faire :

[Utiliser un taux d'accroissement pour calculer un nombre dérivé]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On cherche à calculer le nombre dérivée de f en 3.

- On calcule le taux d'accroissement pour $x_A = 3$ en fonction de h : on a pour tout h réel non nul $\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2-3^2}{h^2} = \frac{3^2+2\times 3h+h^2-3^2}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = 6 + h$
- On fait tendre h vers 0 : le taux tend vers 6 quand h tend vers 0.

  Donc 6 est le nombre dérivé de $x \longmapsto x^2$ en 3 et on note $f'(3) = 6$.

2 Tangente à une courbe

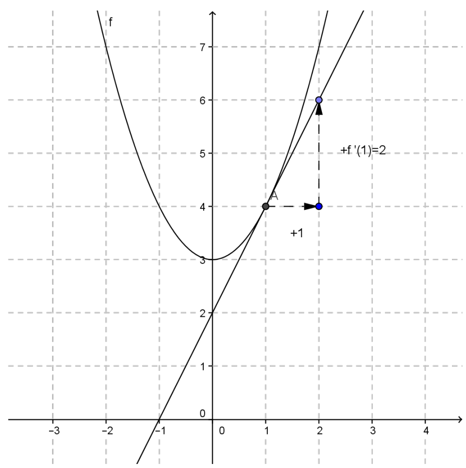
Définition :
Si f est dérivable en x_A dans un repère, *la tangente* $\mathcal{T}$ à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f en x_A est la droite qui a pour coefficient directeur $f'(x_A)$ et qui passe par le point A de coordonnées $(x_A; f(x_A))$.

Exemple de savoir faire :

[Calculer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe en un point et la tracer]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3$. On cherche à tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

- On calcule le taux d'accroissement en 1 : on a pour tout h réel : $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1^2+2\times h+h^2-1^2}{h} = 2+h$
- On fait tendre h vers 0 pour obtenir le nombre dérivé en 1 : $f'(1) = 2$
- On trace la droite passant par le point de la courbe d'abscisse 1 et de coefficient directeur $f'(1) = 2$:



Propriété :
La tangente en A d'abscisse x_A à $\mathcal{C}_f$ a pour équation

$$y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$$

Preuve :

Soit $A(x_A; f(x_A))$ et soit $M(x; y)$ un point avec $x \in I$. Alors M appartient à la tangente en A si et seulement si $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ de coordonnées $(1; f'(x_A))$, qui dirige la tangente, sont colinéaires. Cela signifie encore que $(x - x_A) \times f'(x_A) - 1 \times (y - f(x_A)) = 0$ c'est à dire $y = f(x_A) + f'(x_A)(x - x_A)$

Exemple de savoir faire :

[Calculer l'équation réduite de la tangente en un point d'abscisse donnée] On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2+3$ et la tangente au point d'abscisse 1 vue plus haut. On a donc $x_A = 1$ et $f'(x_A) = f'(1) = 2$ d'après le calcul fait plus haut.
En outre $f(x_A) = 1^2+3 = 4$ d'où l'équation est $y = f'(x_A)(x-x_A)+f(x_A)$ donc $y = 2(x-1)+4$ c'est à dire $y = 2x+2$.

3 Fonction dérivée et dérivées de fonctions usuelles

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est dite *dérivable sur I* si elle est dérivable en tout réel a de I.
La fonction qui, à tout réel a, associe le nombre dérivé $f'(a)$ en a, est appelée *fonction dérivée* de f et notée f'.

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$
k	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$mx+p$	m	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Preuves :

Pour tout $a \in I$ et tout $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$ on a :

- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$
  d'où la dérivée de $x \mapsto k$ est $x \mapsto 0$ en tout réel a;
- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a+h-a}{h} = 1$
  d'où la dérivée de $x \mapsto x$ est $x \mapsto 1$ en tout réel a;
- $\frac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h} = \frac{mh}{h} = m$
  d'où la dérivée de $x \mapsto mx+p$ est $x \mapsto m$ en tout réel a;
- $\frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = 2a+h$
  qui tend vers $2a$ quand h tend vers 0;
- $\frac{(a+h)^n-a^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{k=n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}h^k}{h}$
  qui tend vers na^{n-1} quand h tend vers 0;

- pour la fonction inverse,

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} &= \frac{\frac{a}{a(a+h)}-\frac{a+h}{a(a+h)}}{h}\\ &= \frac{a-(a+h)}{ah(a+h)}\\ &= \frac{-1}{a(a+h)}\end{aligned}$$

  qui tend vers $\frac{-1}{a^2}$ quand h tend vers 0.
- pour la fonction racine carrée,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} &= \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}\\ &= \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}\\ &= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\end{aligned}$$

  qui tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ quand h tend vers 0.

Exemples :

- $x \mapsto 3x-2$ a pour fonction dérivée $x \mapsto 3$ pour tout réel x.
- $x \mapsto x^3$ a pour fonction dérivée $x \mapsto 3x^2$ pour tout réel x.

Remarque :

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.
En effet, pour $a = 0$,

- si $h > 0$, $\frac{|a+h|-|a|}{h} = \frac{0+h-0}{h} = 1$
- si $h < 0$, $\frac{|a+h|-|a|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$

Donc le taux d'accroissement n'admet pas de limite en 0 et la fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.

4 Opérations sur les fonctions dérivables

4.1 Somme

Propriété :
Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, alors $u+v$ est définie et dérivable sur I et :

$$(u+v)' = u' + v'$$

Preuve :
$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$ qui tend vers $u'(a) + v'(a)$ quand h tend vers 0.

Exemple :
[Calculer la fonction dérivée d'une somme de deux fonctions dérivables]
$x \mapsto \frac{1}{x} + x^4$ a pour fonction dérivée $x \mapsto -\frac{1}{x^2} + 4x^3$ pour tout réel x non nul.

4.2 Multiplication par un nombre réel k

Propriété :
Soient u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel, alors ku est définie et dérivable sur I et :

$$(ku)' = ku'$$

Preuve :
Même démarche que la précédente.

Exemple :
[Calculer la fonction dérivée d'une fonction produit d'un réel par une fonction dérivable]
$x \mapsto 3x^5 - 3x^2 + 3$ a pour fonction dérivée $x \mapsto 3 \times 5x^4 - 3 \times 2x + 0$ c'est à dire $x \mapsto 15x^4 - 6x$ pour tout réel x.

4.3 Produit

Propriété :
Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, alors uv est dérivable sur I et

$$(uv)' = u'v + v'u$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} &= \frac{(u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}\\ &= \frac{(u(a+h)-u(a))v(a+h)}{h}+\frac{u(a)(v(a+h)-v(a))}{h}\\ &= \frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h)+u(a)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\end{aligned}$$

qui tend vers $u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$ quand h tend vers 0.

Exemple :
[Calculer la fonction dérivée du produit de deux fonctions dérivables]
On considère $f : x \mapsto (3x-2)\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}$. On pose $u(x) = 3x-2$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Alors $u'(x) = 3$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = 3\sqrt{x} - (3x-2)\frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout réel x.

4.4 Quotient

Propriété :
Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, avec pour tout x de I, $v(x) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est définie et dérivable sur I et

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$$

En particulier,

$$(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{u}{v}(a+h)-\frac{u}{v}(a)}{h} &= \frac{\frac{u(a+h)}{v(a+h)}-\frac{u(a)}{v(a}}{h}\\
&= \frac{\frac{u(a+h)}{v(a+h)}-\frac{u(a+h)}{v(a)}+\frac{u(a+h)}{v(a)}-\frac{u(a)}{v(a)}}{h}\\
&= \frac{u(a+h)(\frac{1}{v(a+h)}-\frac{1}{v(a)})+\frac{1}{v(a)}(u(a+h)-u(a))}{h}\\
&= u(a+h)\frac{v(a)-v(a+h)}{hv(a)v(a+h)}+\frac{1}{v(a)}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\\
&= -u(a+h)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\frac{1}{v(a)v(a+h)}+\frac{1}{v(a)}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}
\end{aligned}$$

qui tend vers $\frac{-u(a)v'(a)}{v(a)v(a)}+\frac{u'(a)}{v(a)}$ c'est à dire $\frac{-u(a)v'(a)+u'(a)v(a)}{v(a)^2}$ quand h tend vers 0.

Exemple :
[Calculer la fonction dérivée d'une fonction quotient de deux fonctions dérivables]
On considère $f : x \mapsto \frac{3x^2-x}{4-5x}$ définie pour tout réel x différent de $\frac{4}{5}$. On pose $u(x) = 3x^2 - x$ et $v(x) = 4 - 5x$. Alors $u'(x) = 6x - 1$ et $v'(x) = -5$ d'où $f'(x) = (\frac{u'v-v'u}{v^2})(x) = \frac{(6x-1)(4-5x)-(-5)(3x^2-x)}{(4-5x)^2} = \frac{24x-4-30x+5x+15x^2-5x}{(4-5x)^2} = \frac{15x^2-6x-4}{(4-5x)^2}$.

4.5 Dérivation de fonctions composées

Propriété :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soient a et b deux réels et J l'ensemble des réels x tels que $ax+b \in I$. Alors la fonction $g : x \longmapsto f(ax+b)$ est dérivable sur J et pour tout x réel de J,

$$g'(x) = af'(ax+b)$$

En particulier,

$$((ax+b)^n)' = a \times n(ax+b)^{n-1}$$

$$(\sqrt{ax+b})' = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

Preuve :
admise

Exemple [Calculer la fonction dérivée d'une fonction composée] :

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (4x-5)^2$. g est dérivable sur $\mathcal{R}$ et :
  $g'(x) = 2 \times 4 \times (4x-5) = 8(4x-5) = 3x - 40$.
- Soit h la fonction définie sur $I =]\frac{-1}{3}; +\infty[$ par $h(x) = 5\sqrt{3x+1}$. h est dérivable sur I et :
  $h'(x) = 5 \times \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{15}{2\sqrt{3x+1}}$.