

# Applications de la dérivation, cours, spécialité mathématiques

F.Gaudon

1<sup>er</sup> juillet 2024

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Du sens de variation au signe de la dérivée</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Du signe de la dérivée au sens de variation</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Dérivée, extrema et tableau de variation</b>	<b>5</b>

# 1 Du sens de variation au signe de la dérivée

## Propriété :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si  $f$  est croissante sur  $I$ , alors pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \geq 0$ ;
- si  $f$  est décroissante sur  $I$ , alors pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \leq 0$ ;
- si  $f$  est constante sur  $I$ , alors pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) = 0$ .

## Preuve :

Soit  $a \in I$  et  $h \in I$  tel que  $a + h \in I$  et  $h \neq 0$ .

Supposons que  $f$  est croissante sur  $I$  (les deux autres cas se justifient par la même méthode). On a alors  $f(a + h) - f(a) \geq 0$  si  $h > 0$  et  $f(a + h) - f(a) \leq 0$  si  $h < 0$ .

D'où

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \geq 0$$

si  $h > 0$  et

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \geq 0$$

si  $h < 0$ .

Par conséquent, quand  $h$  devient infiniment petit,  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  reste positif et sa limite  $f'(a)$  aussi.

## Exemple :

[Passer du tableau de variations de la fonction au tableau de signes de la dérivée]

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[-3; 5]$  et telle que :

$x$	-3	-1	0	5
variations de	4		1	
$f(x)$		↘	↗	↘
		-2		0

Alors la fonction dérivée  $f'$  a pour tableau de signes :

$x$	-3	-1	0	5	
$f'(x)$	-	0	+	0	-

## 2 Du signe de la dérivée au sens de variation

### Propriété :

- Si pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \geq 0$  (resp.  $f'(x) > 0$ ) sauf en quelques points où elle s'annule, alors  $f$  est croissante (resp. strictement croissante) sur  $I$  ;
- si pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \leq 0$  (resp.  $f'(x) < 0$ ) sauf en quelques points où elle s'annule, alors  $f$  est décroissante (resp. strictement décroissante) sur  $I$  ;
- si pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) = 0$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .

### Preuve :

admis

### Exemple :

[Passer du tableau de signe de la dérivée au tableau de variations de la fonction]

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[-3; 5]$  et telle que :

$x$	-3	-2	0	5	
signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+

Le tableau de variations de  $f$  est :

$x$	-3	-2	0	5	
signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
variations de $f(x)$		↗	↘	↗	

### Exemples par le calcul :

[Étudier les variations d'une fonction en étudiant le signe de la fonction dérivée]

- On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 4x^3 + 5$ .
  - On calcule l'expression algébrique de la fonction dérivée :  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 12x^2$ .
  - On étudie le signe de la fonction dérivée : pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) \geq 0$  ;
  - On en déduit les variations de la fonction  $f$  : par conséquent,  $f$  est une fonction strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

- Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{4}{2x+3}$  pour tout  $x$  appartenant à  $[3; +\infty[$ .

On a  $f'(x) = -\frac{8}{(2x+3)^2}$ .

Pour tout  $x$  appartenant à  $[3; +\infty[$ , le carré  $(2x+3)^2$  est toujours positif donc  $f'(x) < 0$

Donc  $f$  est décroissante strictement sur  $[3; +\infty[$ .

- Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -\infty; +\infty[$  par  $f(x) = 3x^2 + 7x$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 6x + 7$ .

$f'(x) \geq 0$  si et seulement si  $6x + 7 \geq 0$  c'est à dire  $x \geq \frac{-7}{6}$ .

On a donc le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$\frac{-7}{6}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$\searrow$ $\frac{-49}{12}$ $\nearrow$	

- Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ .

Pour tout réel  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$ .

On a donc le tableau de variation :

$x$	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -		- 0 +	
$f(x)$		$\nearrow$ -2 $\searrow$		$\searrow$ 2 $\nearrow$	

### 3 Dérivée, extrema et tableau de variation

#### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0$  un réel de  $I$ .

- Dire que  $f(x_0)$  est un *maximum local* (resp. *minimum local*) de  $f$  signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert  $J$  inclus dans  $I$  et contenant  $x_0$  tel que pour tout  $x$  de  $J$ ,  $f(x) \leq f(x_0)$  (resp.  $f(x) \geq f(x_0)$ ).
- Un minimum local ou un maximum local est appelé un *extremum local*.

#### Propriété :

Si  $f$  est une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  ouvert (c'est à dire de la forme  $]a; b[$ )

- Si  $f$  admet un maximum local ou un minimum local en  $x_0 \in I$  avec  $x_0$ , alors  $f'(x_0) = 0$ ;
- si  $f'$  s'annule en  $x_0$  en changeant de signe, alors  $f$  admet en  $x_0$  un extremum local.

#### Preuve :

Supposons que  $f$  admet un maximum local en  $x_0$  appartenant à  $I$ . Alors pour tout  $x$  appartenant à  $I$  et inférieur strictement à  $x_0$ , on a  $f(x) - f(x_0) \leq 0$  et  $x - x_0 < 0$ . D'où  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$  et quand  $x$  tend vers  $x_0$ , on obtient  $f'(x_0) \geq 0$ . Par contre, pour tout  $x$  appartenant à  $I$  et supérieur strictement à  $x_0$  on a  $f(x) - f(x_0) \leq 0$  et  $x - x_0 > 0$  donc  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$  donc quand  $x$  tend vers  $x_0$  on obtient  $f'(x_0) \leq 0$ . Par conséquent,  $f'(x_0) = 0$ . La deuxième partie de propriété est admise.

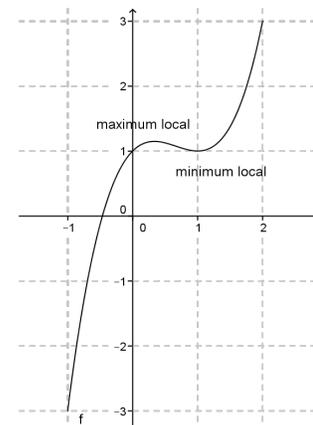
#### Visualisation :

Cas d'un minimum :

$x$	$x_0$		
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\swarrow$ $f(x_0)$ $\nearrow$		

Cas d'un maximum :

$x$	$x_0$		
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$ $f(x_0)$ $\searrow$		



#### Remarque :

On peut avoir  $f'(a) = 0$  pour un réel  $a$  appartenant à  $I$  sans que  $f$  n'admette d'extremum local en  $a$ . Par exemple, pour  $f(x) = x^3$ , on a  $f'(0) = 0$  mais  $f$  n'admet pas d'extremum en 0.