

Suites de nombres, cours, première STMG

F.Gaudon

24 août 2019

Table des matières

1	Notion de suite	2
2	Méthodes de construction des suites	2
2.1	Définition explicite	2
2.2	Définition par récurrence	3
3	Variations et représentation graphique	3
4	Suites arithmétiques	4
5	Suites géométriques	7

1 Notion de suite

Définition :

On appelle *suite* toute fonction u qui à tout entier naturel n associe un nombre réel $u(n)$ pour tout entier naturel. Il s'agit en fait d'une « liste numérotée » de réels.

Exemple :

Soit u la suite définie par $u(n) = 3^n$. On a $u(4) = 3^4 = 81$.

Définition :

- L'image de n par la *suite* u est notée u_n au lieu de $u(n)$.
- u_n est appelé *terme* de rang n ou *terme général* de la suite.
- u_{n+1} est le terme suivant u_n et u_{n-1} est le terme précédent u_n .
- La suite u est souvent notée (u_n) .

Remarque :

- Si u_0 est le premier *terme* de la suite, u_n est le $n + 1^{\text{e}}$ terme.
- Si u_1 est le premier *terme* de la suite, u_n est le n^{e} terme.

2 Méthodes de construction des suites

2.1 Définition explicite

Définition :

Soit f une fonction définie de $[0; +\infty[$ dans \mathbb{R} , on définit une suite (u_n) en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ c'est à dire un procédé qui à tout rang n associe le terme u_n c'est à dire :

$$n \xrightarrow{f} u_n$$

Exemple :

Soit (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n^2 + 2$.

On a $u_1 = 3 \times 1^2 + 2 = 5$.

$u_2 = 3 \times 2^2 + 2 = 14$

$u_{10} = 3 \times 10^2 + 2 = 302$.

2.2 Définition par récurrence

Définition :

Soit f une fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Une suite définie par *récurrence* est une suite définie par son premier terme u_0 (ou u_1) et par un procédé indiquant comment calculer le terme suivant à partir du terme actuel c'est à dire par la relation vraie pour tout

$$n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

c'est à dire :

$$u_0 \xrightarrow{f} u_1 \xrightarrow{f} u_2 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} u_n$$

Exemple :

$$u_n = \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

On a $u_1 = 2u_0 + 3 = 2 \times 4 + 3 = 11$

puis $u_2 = 2u_1 + 3 = 2 \times 11 + 3 = 25$

et $u_3 = 2u_2 + 3 = 2 \times 25 + 3 = 53$.

3 Variations et représentation graphique

Définition : sens de variations :

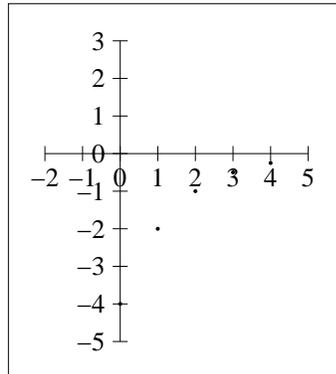
- Une suite $(u_n)_n$ est strictement croissante si pour tout entier naturel n , $u_{n+1} > u_n$.
- Une suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante si pour tout entier naturel n , $u_{n+1} < u_n$.

Définition : représentation graphique :

La représentation graphique d'une suite (u_n) dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(n; u_n)$.

Exemple :

La figure ci-dessous montre la représentation graphique de la suite définie par $u_n = -4 \times \frac{1}{2^n}$ pour tout entier naturel n .



4 Suites arithmétiques

Définition :

Soit r un nombre réel. On appelle *suite arithmétique* de *raison* r toute suite définie par son premier terme u_0 (ou u_1) et pour tout entier naturel n par la relation :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

D'où le schéma :

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} \dots \xrightarrow{+r} u_n$$

Exemple :

La suite définie par $u_0 = 11$ et $u_{n+1} = u_n - 2$ pour tout entier naturel n est arithmétique.

On a :

$$u_1 = u_0 - 2 = 11 - 2 = 9,$$

$$u_2 = u_1 - 2 = 9 - 2 = 7,$$

$$u_3 = u_2 - 2 = 7 - 2 = 5.$$

Propriété :

Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si pour tout entier n , la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante est alors la raison de la suite.

Exemple [Savoir démontrer qu'une suite est arithmétique] :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4 - 5n$.

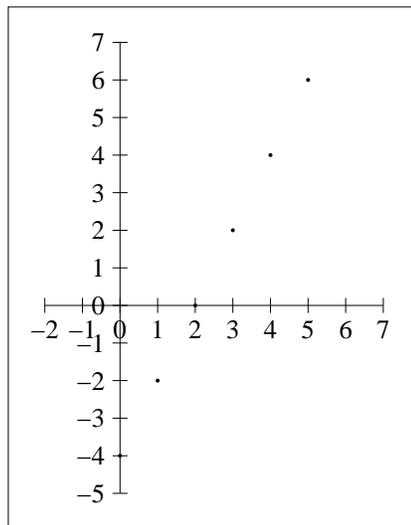
Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = 4 - 5(n+1) - (4 - 5n) = 4 - 5n - 5 - 4 + 5n = -5$
donc (u_n) est arithmétique de raison -5 .

Propriété :

- Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si sa représentation graphique dans un repère du plan est constituée de points alignés.
- Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si elle s'écrit sous la forme $u_n = an + b$ où a et b sont deux réels fixés.

Exemple :

La figure ci-dessous montre la représentation graphique de la suite définie par $u_n = -4 + 2n$ pour tout entier naturel n .

**Propriété :**

Soit (u_n) une suite arithmétique et p et n deux entiers naturels distincts.

Alors la raison r de la suite est donnée par :

$$r = \frac{u_n - u_p}{n - p}$$

Exemple [Savoir calculer la raison d'une suite arithmétique] :

Soit (u_n) une suite arithmétique vérifiant $u_{10} = 34$ et $u_{16} = 43$. On recherche la raison de la suite.

On a $u_{16} = u_{10} + 6 \times r$ où r est la raison de la suite. D'où $43 = 34 + 6r$ c'est à dire $r = \frac{43-34}{6} = 1,5$.

Variations :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante.

5 Suites géométriques

Définition :

Soit b un réel. On appelle suite *géométrique* de *raison* b toute suite définie par son premier terme u_0 (ou u_1) et telle que pour tout entier naturel $n \geq 0$ (ou $n \geq 1$) :

$$u_{n+1} = bu_n$$

D'où le schéma :

$$u_0 \xrightarrow{\times b} u_1 \xrightarrow{\times b} u_2 \xrightarrow{\times b} \dots \xrightarrow{\times b} u_n$$

Exemple :

La suite (v_n) définie par $v_0 = 9$ et $v_{n+1} = v_n \times \frac{1}{3}$ pour tout entier naturel n , est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

On a :

$$v_1 = v_0 \times \frac{1}{3} = 9 \times \frac{1}{3} = 3.$$

$$v_2 = v_1 \times \frac{1}{3} = 3 \times \frac{1}{3} = 1.$$

Propriété :

Une suite (u_n) est géométrique si et seulement si pour tout entier n , le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Sa valeur est alors la raison b de la suite.

Exemple [Savoir reconnaître une suite géométrique] :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0,5 \times 3^n$.

On a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{0,5 \times 3^{n+1}}{0,5 \times 3^n} = \frac{0,5 \times 3^n \times 3}{0,5 \times 3^n} = 3$$

Donc la suite est géométrique de raison 3.

Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $b > 0$. (u_n) est :

- strictement croissante si $b > 1$;
- strictement décroissante si $0 < b < 1$.

Propriété :

Un capital C_0 est placé pendant n années au taux annuel de t % avec intérêts composés.

Alors, au bout de n années, le capital disponible C_n est :

$$C_n = C_0 \times (1 + t)^n$$

Définition :

- C_n est appelé *valeur acquise* par le capital C_0 pendant n années au taux de t %.
- C_0 est appelé *valeur actuelle* de C_n . On a $C_0 = \frac{C_n}{(1+t)^n}$.
- Deux taux correspondants à des périodes de placement différentes sont dits *équivalents* lorsque, à intérêts composés, ils donnent la même valeur acquise du capital au bout du même temps de placement.

Exemple :

C_0 est placé à 0,26 % par mois avec intérêts composés sur 12 mois.

On a :

$$C_{12} = C_0 \times \left(1 + \frac{0,26}{100}\right)^{12} \approx C_0 \times 1,0317$$

Donc le taux annuel équivalent au taux mensuel de 0,26 % est 3,17 %.