Fonctions polynômes de degré 2, cours, 1 STMG

1 Définition et forme factorisée

Définition :
On appelle *fonction polynôme du second degré* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'écrit .... ; où a, b et c sont des réels fixés et $a \neq 0$.

Propriété [automatismes] :
Pour tous les nombres réels a, b et k :

$$k(a+b) = \ldots\ldots$$

$$(a+b)(c+d) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

forme factorisée, produit *forme ...., ...*

Propriété [automatismes] :
Pour tous les nombres réels a et b on a les *identités remarquables* suivantes :

$$(a+b)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(a-b)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(a-b)(a+b) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

forme factorisée, produit *forme ...., ...*

Propriété :
Soient a, x_1 et x_2 des réels. La fonction f définie par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ est une fonction polynôme du second degré. L'écriture $a(x-x_1)(x-x_2)$ est la forme .... de cette fonction.

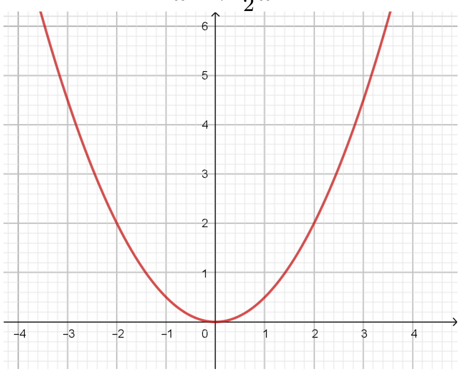
Preuve :
Pour tous les réels x,
$a(x-x_1)(x-x_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
....
....

2 Représentation graphique et variations

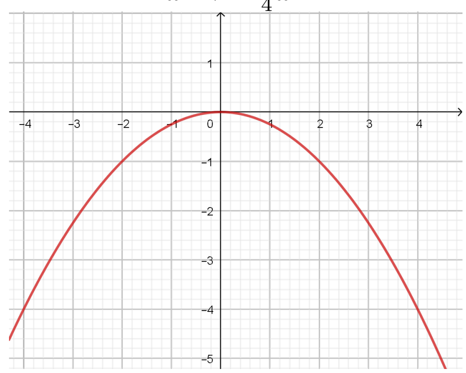
Propriété :
La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto ax^2$ est une .... de *sommet* le point .... et

- Si $a > 0$, f est .... sur $]-\infty; 0]$ et .... sur $[0; +\infty[$.
  La parabole représentant f a donc ses branches « .... » ;
- si $a < 0$, f est .... sur $]-\infty; 0]$ et .... sur $[0; +\infty[$.
  La parabole a ses branches « .... ».

$x \mapsto \frac{1}{2}x^2$



$x \mapsto -\frac{1}{4}x^2$



Propriété :
La représentation graphique de la fonction $x \mapsto ax^2 + b$ est une .... de *sommet* ....
La fonction $x \mapsto ax^2 + b$ a les mêmes variations que la fonction $x \mapsto$ .... : la parabole représentant $x \mapsto ax^2 + b$ est tournée dans le même sens que la parabole représentant $x \mapsto$ ....

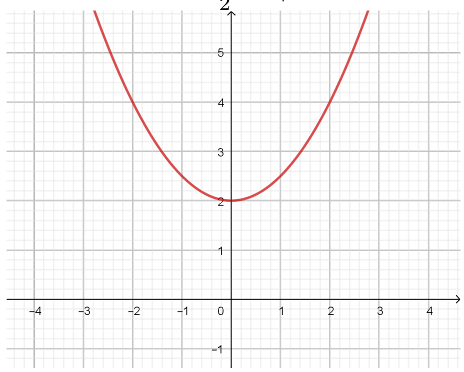
Synthèse :
Si $a > 0$,

x	-∞ .... $+\infty$
$f(x)$	....

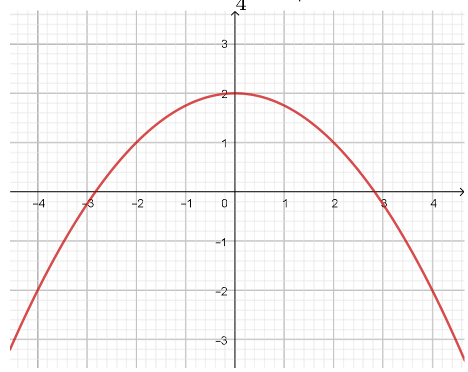
et si $a < 0$,

x	-∞ .... $+\infty$
$f(x)$	....

$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 2$



$x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + 2$



Propriété :
La fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ a les mêmes variations que $x \mapsto$ ....
La représentation graphique de la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ est une ....

- Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le .... ;
- si $a < 0$, la parabole est tournée vers le .... La représentation graphique d'une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est donc une ....

Propriété [automatismes] :
Un produit est nul si et seulement si ....

Exemples [Résolution d'équations du second degré] :

- Résolution de l'équation $(3x + 2)(4x - 3) = 0$ dans l'ensemble des réels.
  D'après la propriété énoncée, ... ou ....
  c'est à dire .... ou ....
  donc encore .... ou ....
  L'équation $(3x + 2)(4x - 3) = 0$ a donc pour solutions .... et ....
- Résolution de l'équation $(3x + 2)(2x - 1) - x(3x + 2) = 0$ dans l'ensemble des réels.
  Ici, l'équation n'est pas factorisée. La développer ne permet pas de résoudre l'équation car on trouve $3x^2 - x - 2 = 0$ qu'on ne sait pas résoudre.
  Il faut donc la .... :
  L'équation donne alors ....
  c'est à dire ....
  qui se résout en utilisant la propriété énoncée ci-dessus.
  On a donc .... ou ....
  donc .... ou ....

- Résolution de l'équation $x^2 + 4x + 4 = 0$.
  Ici encore, l'équation n'est pas factorisée. Il n'y a pas de facteur commun mais une identité remarquable apparaît : ....

On résout donc l'équation ....
qui donne .... donc ....

Propriété et définition :
Les points d'intersection de la parabole avec l'axes des abscisses sont les points de coordonnées .... et ....
Si .... , il n'y a qu'un seul point d'intersection.
Les valeurs x_1 et x_2 sont appelées .... du polynôme. Ce sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Dans le cas où ...., on dit qu'il y a une *racine double*.

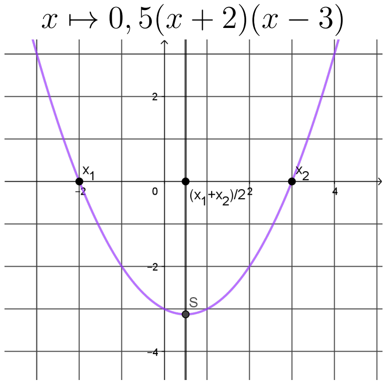
Preuve :
$f(x) = 0$ équivaut à ....
c'est à dire .... ou ....
c'est à dire encore .... ou ....

Propriété :

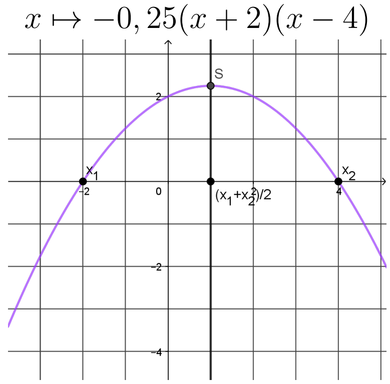
- La parabole représentant $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation ....
- L'axe de symétrie passe par le point .... ;
- L'axe de symétrie passe par .... ;
- Si $a > 0$, la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ admet un minimum en .... ;
- Si $a < 0$, la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ admet un maximum en ....

Le point d'abscisse .... est le *sommet* de la parabole.

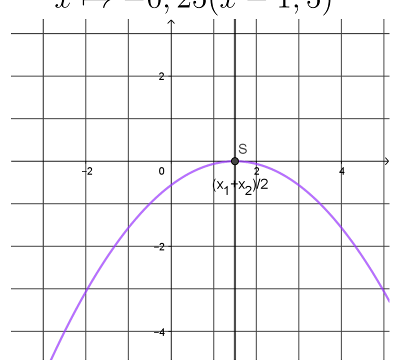
$x \mapsto 0,5(x+2)(x-3)$



$x \mapsto -0,25(x+2)(x-4)$



$x \mapsto -0,25(x-1,5)^2$



3 Signe

Propriété :

On suppose $x_1 \leq x_2$.

- Si $a > 0$, la fonction est positive sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et négative sur $[x_1; x_2]$;
- si $a < 0$, la fonction est négative sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et positive sur $[x_1; x_2]$;

Exemple [Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré] :

On considère la fonction $x \mapsto 5(2x-3)(x-1)$.

- $2x - 3 = 0$ équivaut à .... donc à ....

  $x - 1 = 0$ pour ....

  On a donc $x_1 =$ ......, $x_2 =$ .... et $a =$ ....
- On fait un tableau de signes ; les lignes 2,3 et 4 ne sont pas nécessaires mais permettent une vérification :

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
5		.....		.....		.....	
$x-1$		.....	.....	.....		.....	
$2x-3$		.....		.....	.....	.....	
$5(2x-3)(x-1)$		.....		.....		.....	

Propriété :

Si x_1 est une racine de la fonction polynôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$, alors la fonction est factorisable par $x - x_1$ c'est à dire peut s'écrire $x \mapsto$.................. où x_2 est un réel restant à déterminer.

Exemple [Savoir factoriser en utilisant une racine] :

On considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2 - 18x + 15$.

- 1 est une racine évidente : en effet, ... ;
- $f(x)$ peut donc s'écrire d'après la propriété ....

  On développe : ....

  On doit avoir .... donc .... donc ....