Nombre dérivé et tangentes, cours, 1 STMG

1 Nombre dérivé

On considère une fonction f définie sur un intervalle I non vide ainsi que deux réels x_A et h avec $h \neq 0$ tels que $x_A \in I$ et $x_A + h \in I$.

Définition :

Le *taux d'accroissement* de f entre x_A et $x_A + h$ est le nombre :

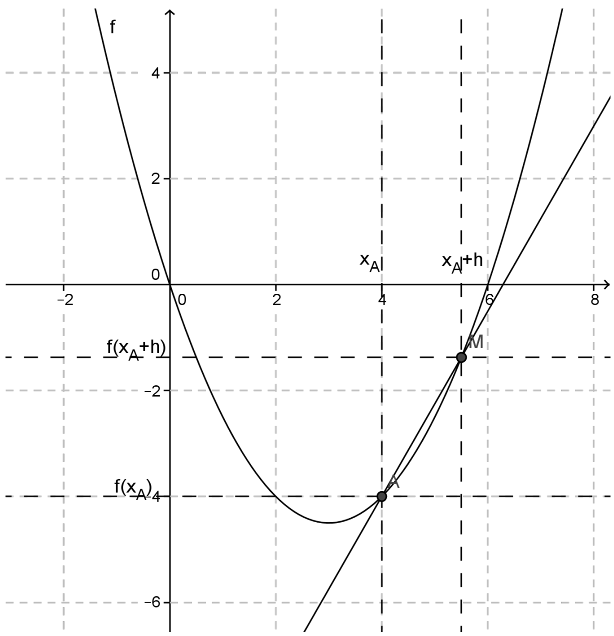
....

définition :

Lorsque le taux d'accrois

admet un ....

dit aussi que f est ....



Exemple d'utilisation d'un taux d'accroissement pour calculer un nombre dérivé :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On cherche à calculer le nombre dérivée de f en 3.

- On calcule le taux d'accroissement pour $x_A = 3$ en fonction de h : on a pour tout h réel non nul $\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2-3^2}{h^2} = \frac{3^2+2\times 3h+h^2-3^2}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = 6 + h$
- On fait tendre h vers 0 : le taux tend vers 6 quand h tend vers 0.
  Donc 6 est le nombre dérivé de $x \longmapsto x^2$ en 3 et on note $f'(3) = 6$.

2 Tangente à une courbe

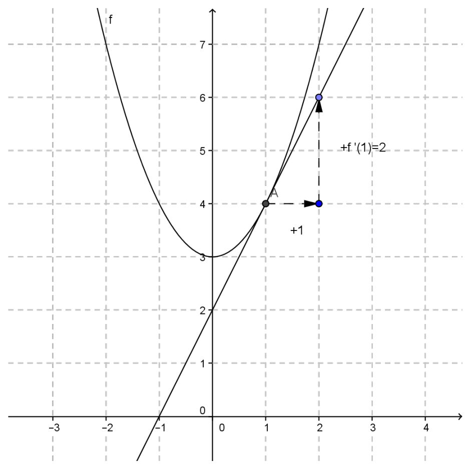
Définition :

Si f est dérivable en x_A dans un repère, *la tangente* $\mathcal{T}$ à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f en x_A est la droite qui a pour coefficient directeur $f'(x_A)$ et qui passe par le point A de coordonnées $(x_A; f(x_A))$.

Exemple [Calculer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe en un point et la tracer] :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3$. On cherche à tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

- On calcule le taux d'accroissement en 1 : on a pour tout h réel : $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1^2+2\times h+h^2-1^2}{h} = 2 + h$
- On fait tendre h vers 0 pour obtenir le nombre dérivé en 1 : $f'(1) = 2$
- On trace la droite passant par le point de la courbe d'abscisse 1 et de coefficient directeur $f'(1) = 2$:



Propriété :

La tangente en A d'abscisse x_A à $\mathcal{C}_f$ a pour équation

....

Preuve :
Soit $A(x_A; f(x_A))$ et soit $M(x; y)$ un point avec $x \in I$. Alors M appartient à la tangente en A si et seulement si .... et .... de coordonnées ...., qui dirige la tangente, sont colinéaires. Cela signifie encore que .... c'est à dire ....

3 Fonction dérivée

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est dite *dérivable sur I* si ....

La fonction qui, à tout réel a, associe le nombre dérivé $f'(a)$ en a, est appelée .... de f et notée f'.

3.1 Dérivées de fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$
k	....	$\mathbb{R}$
x	....	$\mathbb{R}$
$mx+p$	....	$\mathbb{R}$
x^2	.....	$\mathbb{R}$
x^n	......	$\mathbb{R}$

Preuves :
Pour tout $a \in I$ et tout $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$ on a :

- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = ...$
  d'où la dérivée de $x \mapsto k$ est .... en tout réel a ;
- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = ...$
  d'où la dérivée de $x \mapsto x$ est .... en tout réel a ;
- $\frac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h} = ...$
  d'où la dérivée de $x \mapsto mx+p$ est .... ;
- $\frac{(a+h)^2-a^2}{h} = ...$
  qui tend vers .... quand h tend vers 0 ;
- admise.

4 Opérations sur les fonctions dérivables

4.1 Somme

Propriété :
Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, alors $u+v$ est définie et dérivable sur I et :

....

Preuve :
$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = ...$
qui tend vers $u'(a)+v'(a)$ quand h tend vers 0.

Exemple [Calculer la fonction dérivée d'une somme de deux fonctions dérivables] :

$x \mapsto \frac{1}{x} + x^4$ a pour fonction dérivée $x \mapsto$ .... pour tout réel x non nul.

4.2 Multiplication par un nombre réel k

Propriété :
Soient u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel, alors ku est définie et dérivable sur I et :

....

Preuve :
Même raisonnement que précédemment.

Exemple [Calculer la fonction dérivée d'une fonction produit d'un réel par une fonction dérivable] :

$x \mapsto 3x^5 - 3x^2 + 3$ a pour fonction dérivée $x \mapsto$ .... c'est à dire $x \mapsto$ .... pour tout réel x.