Dérivation et étude de fonctions polynômes, cours, 1 STMG

1 Du sens de variation au signe de la dérivée

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I, ... ;
- si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I, ... ;
- si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I, ...

Exemple :
Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ et telle que :

x	-3		-1		0		5
variations de $f(x)$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Alors la fonction dérivée f' a pour tableau de signes :

x	...		...		...		...
$f'(x)$		...	...	...	...	...	

2 Du signe de la dérivée au sens de variation

Propriété :

- Si pour tout réel x de I, $f'(x) > 0$ sauf en quelques points où elle s'annule, alors f est .... sur I ;
- si pour tout réel x de I, $f'(x) < 0$ sauf en quelques points où elle s'annule, alors f est .... sur I ;
- si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est .... sur I.

Exemple avec un tableau de signes :
Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ et telle que :

x	-3		-2		0		5
signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+	

Le tableau de variations de f est :

x	-3		-2		0		5
variations de $f(x)$		....		....		....	

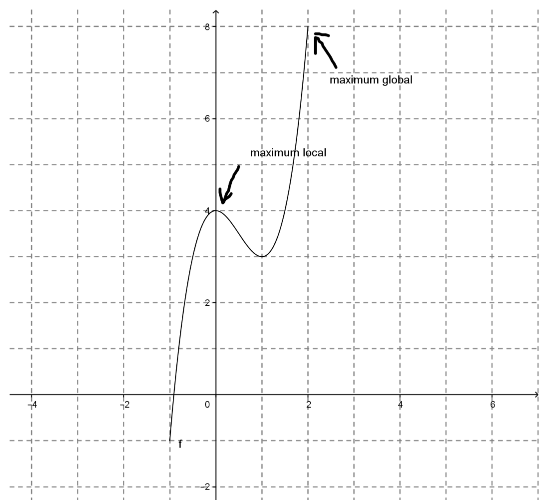
Exemple par le calcul :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 5$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) =$ .... Donc pour tout réel x, $f'(x)$........... et par conséquent, f est une fonction .... sur $\mathbb{R}$.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

- Dire que $f(x_0)$ est un *maximum local* de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout x de J, $f(x) \leq f(x_0)$.
- Dire que $f(x_0)$ est un *minimum local* de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout x de J, $f(x) \geq f(x_0)$.
- Un minimum local ou un maximum local est appelé un extremum local.



Propriété :

Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ouvert (c'est à dire de la forme $]a; b[$)

- Si f admet un maximum ou un minimum en $x_0 \in I$ avec x_0, alors .... ;
- si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet en x_0 un extremum local.

Visualisation :

Cas d'un minimum :

x		x_0	
Signe de $f'(x)$	....	....	....
Variations $f(x)$	......	....	......

Cas d'un maximum :

x		x_0	
Signe $f'(x)$	...	....	...
Variations $f(x)$	....	....	....

3 Exemples d'étude de fonctions polynômes

Exemple 1 :
Soit f la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) =$ ....
$f'(x) = 0$ si et seulement si .... c'est à dire $x =$ ....
On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	....	$+\infty$
$f'(x)$	...	...	...
$f(x)$	.....	....	....

Exemple 2 :
Soit f définie pour tout réel x par $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.
Alors $f'(x) =$ .... f' est une fonction polynôme du second degré.
On résout l'équation ....
....
Il y a deux solutions réelles :
$x_1 =$ .....
et $x_2 =$ ......
a est de signe .... donc la .... a ses branches tournées vers .... D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		....		.....		$+\infty$
$f'(x)$		....	....	....	...	...	
$f(x)$	......	......	....	....	....	.....	