Dérivation et étude de fonctions polynômes, cours, 1 STMG

F.Gaudon

11 août 2019

Table des matières

1 Du sens de variation au signe de la dérivée

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est *croissante* sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$;
- si f est*décroissante* sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$;
- si f est *constante* sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.

Exemple :

Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ et telle que :

x	-3		-1		0		5
variations de $f(x)$	4	↘	-2	↗	1	↘	0

Alors la fonction dérivée f' a pour tableau de signes :

x	-3		-1		0		5
$f'(x)$		-	0	+	0	-	

2 Du signe de la dérivée au sens de variation

Propriété :

- Si pour tout réel x de I, $f'(x) > 0$ sauf en quelques points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I ;
- si pour tout réel x de I, $f'(x) < 0$ sauf en quelques points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I ;
- si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Exemple avec un tableau de signes :

Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ et telle que :

x	-3		-2		0		5
signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+	

Le tableau de variations de f est :

x	-3		-2		0		5
variations de $f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

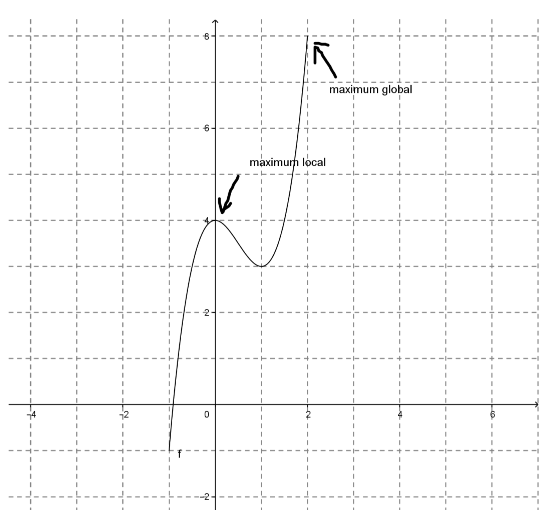
Exemple par le calcul :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 5$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 4 \times 3x^2 = 12x^2$. Donc pour tout réel x, $f'(x) > 0$ et par conséquent, f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

- Dire que $f(x_0)$ est un *maximum local* de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout x de J, $f(x) \leq f(x_0)$.
- Dire que $f(x_0)$ est un *minimum local* de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout x de J, $f(x) \geq f(x_0)$.
- Un minimum local ou un maximum local est appelé un extremum local.



Propriété :
Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ouvert (c'est à dire de la forme $]a; b[$)

- Si f admet un maximum ou un minimum en $x_0 \in I$ avec x_0, alors $f'(x_0) = 0$;
- si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet en x_0 un extremum local.

Visualisation :

Cas d'un minimum :

x		x_0	
Signe $f'(x)$	-	0	+
Variations $f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

Cas d'un maximum :

x		x_0	
Signe $f'(x)$	+	0	-
Variations $f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

3 Exemples d'étude de fonctions polynômes

Exemple 1 :
Soit f la fonction définie sur $]-\infty; +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 6x + 7$.
$f'(x) = 0$ si et seulement si $6x + 7 = 0$ c'est à dire $x = \frac{-7}{6}$.
On a donc le tableau de variations suivant compte tenu de $m = 6$ positif :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$f(-\frac{7}{6})$	$\nearrow$	

Exemple 2 :

Soit f définie pour tout réel x par $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

Alors $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$. f' est une fonction polynôme du second degré.

On résout l'équation $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

On remarque que 1 est une racine évidente de f' : $f'(1) = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 0$

On factorise donc par 1 :

$f'(x) = 3(x-1)(x-x_2) = 3(x^2 - x_2x - x + x_2) = 3x^2 - 3x_2x - 3x + 3x_2$

On doit donc avoir $3x_2 = -1$ c'est à dire $x_2 = \frac{-1}{3}$.

En outre $a = 3$ est positif donc la parabole a ses branches tournées vers le haut. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	$\approx -0,81$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	