Second degré, cours, première STMG

F.Gaudon

8 juin 2014

Table des matières

1 Fonction polynôme du second degré

Définition :

On appelle *fonction polynôme du second degré* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels fixés et $a \neq 0$.

Propriété et définition :

Toute fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ s'écrit aussi :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

où

$$\alpha = \frac{-b}{2a}$$

(prononcer « alpha »)

$$\beta = f(\alpha)$$

(prononcer « beta »)

Cette écriture est appelée *forme canonique* de la fonction f.

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$

et $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$

On vérifie que $3(x-1)^2 - 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 2 = 3x^2 - 6x + 3 - 2 = 3x^2 - 6x + 1 = f(x)$

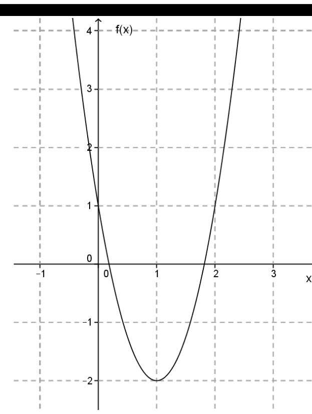
Donc $3(x-1)^2 - 2$ est bien la forme canonique de $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

Propriété :

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan, la représentation graphique de la fonction trinôme du second degré f est une parabole dont le point S de coordonnées $(\alpha; f(\alpha))$ est le sommet.

Exemple :

On a vu que pour $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, on a $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$ donc le point S de coordonnées $(1; -2)$ est le sommet de la parabole représentant la fonction f.



Propriété :
Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,
- si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante puis strictement croissante et admet un minimum en $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.
- si $a < 0$ la fonction f est strictement croissante puis strictement décroissante et admet un maximum en $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.

Synthèse :
Si $a > 0$,

x	-∞		α		+∞
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

et si $a < 0$,

x	-∞		α		+∞
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	

Exemple :
Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$. Par ailleurs, $a = 3$. a est positif donc on a le tableau de variations suivants :

x	-∞		1		+∞
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

2 Équations du second degré

Définition :

- Toute solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est appelée *racine* du trinôme f défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout x réel.
- On appelle *discriminant* du trinôme le réel Δ (prononcer « delta ») défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemple :

- 2 est une racine de $2x^2 - 5x + 2$ car $2 \times 2^2 - 5 \times 2 + 2 = 2 \times 4 - 10 + 2 = 0$.
- Le discriminant du trinôme $2x^2 - 5x + 2$ est $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9$.

Remarque :

Il faut ordonner les termes du trinôme avant de calculer le discriminant.

Propriété :

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution réelle dite racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2+bx+c = 0$ a deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple :

On considère l'équation $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

On a vu que $\Delta = 9 = 3^2$ est positif. Il y a donc deux solutions à cette équation :

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+3}{2\times2} = 2$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-3}{2\times2} = \frac{1}{2}$.

3 Signe de $ax^2 + bx + c$

Propriété :

Avec les mêmes notations que précédemment,

- si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas ;
- si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et s'annule en x_0 uniquement ;
- si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines x_1 et x_2 et du signe opposé à l'intérieur.

Exemple :

Résolution de $-x^2 + 6 + 7 \geq 0$.

- Résolution de $-x^2 + 6x + 7 = 0$:

  On a $\Delta = 36 - 4 \times (-1) \times 7 = 64$.

  $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-6+8}{-2} = -1$ et $x_2 = \frac{-6-8}{-2} = 7$.
- Étude de signe :

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
$-x^2 + 6x + 7$		-	0	+	0	-	

  Donc $S = [-1; 7]$

4 Interprétation graphique

Propriété :
Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont les abscisses des points d'intersection s'ils existent de la parabole représentant la fonction f et de l'axe des abscisses.

Interprétation :

- Si $\Delta > 0$, la courbe coupe l'axe des abscisses en deux points distincts ;
- si $\Delta = 0$, la courbe a pour unique point commun avec l'axe des abscisses son sommet ;
- si $\Delta < 0$, la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses.

En outre, si $a > 0$, la parabole a ses branches tournées vers le haut et tournées vers le bas si $a < 0$.