Équations et inéquations du second degré, cours, 1 STMG

Équations et inéquations du second degré, cours, 1 STMG

F.Gaudon

http://mathsfg.net.free.fr

8 juin 2014

1. Équations du second degré
2. Signe de $ax^2 + bx + c$

1. Équations du second degré
2. Signe de $ax^2 + bx + c$

Définition :

- Toute solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est appelée *racine* du trinôme f défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout x réel.
- On appelle *discriminant* du trinôme le réel Δ (prononcer « delta ») défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemple :

- 2 est une racine de $2x^2 - 5x + 2$ car $2 \times 2^2 - 5 \times 2 + 2 = 2 \times 4 - 10 + 2 = 0$.
- Le discriminant du trinôme $2x^2 - 5x + 2$ est $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9$.

Remarque :
Il faut ordonner les termes du trinôme avant de calculer le discriminant.

Propriété :
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution réelle dite racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple :
On considère l'équation $2x^2 - 5x + 2 = 0$.
On a vu que $\Delta = 9 = 3^2$ est positif. Il y a donc deux solutions à cette équation :
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+3}{2\times 2} = 2$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-3}{2\times 2} = \frac{1}{2}$.

1. Équations du second degré

2. Signe de $ax^2 + bx + c$

Propriété :
Avec les mêmes notations que précédemment,

- si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas ;
- si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et s'annule en x_0 uniquement ;
- si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines x_1 et x_2 et du signe opposé à l'intérieur.

Exemple :

Résolution de $-x^2 + 6 + 7 \geq 0$.

- Résolution de $-x^2 + 6x + 7 = 0$:
  On a $\Delta = 36 - 4 \times (-1) \times 7 = 64$.
  $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes
  $x_1 = \frac{-6+8}{-2} = -1$ et $x_2 = \frac{-6-8}{-2} = 7$.
- Étude de signe :

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
$-x^2 + 6x + 7$		-	0	+	0	-	

Donc $S = [-1; 7]$