# Loi binomiale, cours, 1 STMG

Loi binomiale, cours, 1 STMG

F.Gaudon

http://mathsfg.net.free.fr

6 mai 2015

**Définition :**

Soient $A$ et $B$ deux événements.

- L'événement $A \cap B$ (lire "$A$ inter $B$" ou "$A$ et $B$") est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois $A$ et $B$.

**Définition :**
Soient $A$ et $B$ deux événements.

- L'événement $A \cap B$ (lire "$A$ inter $B$" ou "$A$ et $B$") est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois $A$ et $B$.
- Lorsqu'aucune issue ne réalise $A$ et $B$, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$, on dit que $A$ et $B$ sont *incompatibles* ou *disjoints*.

**Définition :**
Soient $A$ et $B$ deux événements.

- L'événement $A \cap B$ (lire "$A$ inter $B$" ou "$A$ et $B$") est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois $A$ et $B$.
- Lorsqu'aucune issue ne réalise $A$ et $B$, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$, on dit que $A$ et $B$ sont *incompatibles* ou *disjoints*.
- L'événement $A \cup B$ (lire "$A$ union $B$" ou "$A$ ou $B$") est l'ensemble des issues qui réalisent l'événement $A$ ou l'événement $B$ ou les deux, c'est à dire au moins l'un des deux événements.

**Définition :**
Soient $A$ et $B$ deux événements.

- L'événement $A \cap B$ (lire "$A$ inter $B$" ou "$A$ et $B$") est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois $A$ et $B$.
- Lorsqu'aucune issue ne réalise $A$ et $B$, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$, on dit que $A$ et $B$ sont *incompatibles* ou *disjoints*.
- L'événement $A \cup B$ (lire "$A$ union $B$" ou "$A$ ou $B$") est l'ensemble des issues qui réalisent l'événement $A$ ou l'événement $B$ ou les deux, c'est à dire au moins l'un des deux événements.
- L'événement $\bar{A}$ appelé événement *complémentaire* ou *contraire* de $A$ est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas $A$.

**Définition :**
Soient $A$ et $B$ deux événements.

- L'événement $A \cap B$ (lire "$A$ inter $B$" ou "$A$ et $B$") est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois $A$ et $B$.
- Lorsqu'aucune issue ne réalise $A$ et $B$, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$, on dit que $A$ et $B$ sont *incompatibles* ou *disjoints*.
- L'événement $A \cup B$ (lire "$A$ union $B$" ou "$A$ ou $B$") est l'ensemble des issues qui réalisent l'événement $A$ ou l'événement $B$ ou les deux, c'est à dire au moins l'un des deux événements.
- L'événement $\bar{A}$ appelé événement *complémentaire* ou *contraire* de $A$ est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas $A$.

**Propriété :**
Soit $P$ une loi de probabilité sur un ensemble $E$.

- Pour tous les événements $A$ et $B$, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Propriété :**
Soit $P$ une loi de probabilité sur un ensemble $E$.

- Pour tous les événements $A$ et $B$, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- En particulier, si $A$ et $B$ sont des événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

**Propriété :**
Soit $P$ une loi de probabilité sur un ensemble $E$.

- Pour tous les événements $A$ et $B$, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- En particulier, si $A$ et $B$ sont des événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Pour tout les événements $A$ et $B$,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

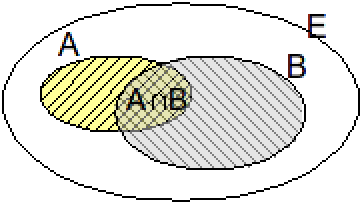
**Propriété :**
Soit $P$ une loi de probabilité sur un ensemble $E$.

- Pour tous les événements $A$ et $B$, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- En particulier, si $A$ et $B$ sont des événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Pour tout les événements $A$ et $B$,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$


E
A
B
A∩B

**Définition :**
Deux expériences sont dites *indépendantes* si

**Définition :**
Deux expériences sont dites *indépendantes* si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.

**Définition :**
Deux expériences sont dites *indépendantes* si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.

**Exemple :**

il y a indépendance lorsqu'on

**Définition :**
Deux expériences sont dites *indépendantes* si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.

**Exemple :**

il y a indépendance lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

**Définition :**
On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues :

**Définition :**
On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues : l'une appelée « succès » et l'autre appelée « échec ».

**Définition :**
On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues : l'une appelée « succès » et l'autre appelée « échec ». On note $p$ la probabilité de succès et $q$ la probabilité d'échec

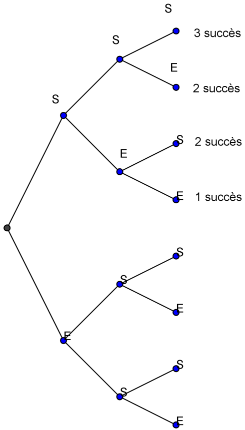
**Définition :**
On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues : l'une appelée « succès » et l'autre appelée « échec ». On note $p$ la probabilité de succès et $q$ la probabilité d'échec ($q = 1 - p$).

**Définition :**
On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues : l'une appelée « succès » et l'autre appelée « échec ». On note $p$ la probabilité de succès et $q$ la probabilité d'échec ($q = 1 - p$). La répétition de cette expérience $n$ fois de manière indépendante constitue

**Définition :**
On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues : l'une appelée « succès » et l'autre appelée « échec ». On note $p$ la probabilité de succès et $q$ la probabilité d'échec ($q = 1 - p$). La répétition de cette expérience $n$ fois de manière indépendante constitue *un schéma de Bernoulli* de paramètres $n$ et $p$.

**Propriété :**
Dans un schéma de Bernoulli, la probabilité d'une liste de résultats est

**Propriété :**
Dans un schéma de Bernoulli, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.


S
S
S
3 succès
E
2 succès
E
S
2 succès
E
1 succès
E
S
S
E
S
S
E

**Exemple :**
On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève 3 produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité $p = 0,05$ d'être défectueux.

**Exemple :**
On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève 3 produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité $p = 0,05$ d'être défectueux.
Sur l'arbre ci-dessus représentant un schéma de Bernoulli de paramètres

**Exemple :**
On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève 3 produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité $p = 0,05$ d'être défectueux.
Sur l'arbre ci-dessus représentant un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et

**Exemple :**
On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève 3 produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité $p = 0,05$ d'être défectueux.
Sur l'arbre ci-dessus représentant un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$,

**Exemple :**
On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève 3 produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité $p = 0,05$ d'être défectueux.
Sur l'arbre ci-dessus représentant un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$, la probabilité d'avoir les deux premières expériences qui donnent un succès et la dernière qui donne un échec est

**Exemple :**
On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève 3 produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité $p = 0,05$ d'être défectueux.
Sur l'arbre ci-dessus représentant un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$, la probabilité d'avoir les deux premières expériences qui donnent un succès et la dernière qui donne un échec est $P(SS\bar{S}) =$

**Exemple :**
On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève 3 produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité $p = 0,05$ d'être défectueux.
Sur l'arbre ci-dessus représentant un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$, la probabilité d'avoir les deux premières expériences qui donnent un succès et la dernière qui donne un échec est $P(SS\bar{S}) = 0,05^2 \times 0,95 \approx 0,002$ soit 0,2 %

**Exemple :**
On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève 3 produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité $p = 0,05$ d'être défectueux.
Sur l'arbre ci-dessus représentant un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$, la probabilité d'avoir les deux premières expériences qui donnent un succès et la dernière qui donne un échec est $P(SS\bar{S}) = 0,05^2 \times 0,95 \approx 0,002$ soit 0,2 % de chances d'avoir les deux premiers produits défectueux uniquement sur les trois prélevés.

**Définition :**
Soit un schéma de Bernoulli de paramètres $n$ et $p$ et soit $X$ le nombre de succès obtenus.

**Définition :**
Soit un schéma de Bernoulli de paramètres $n$ et $p$ et soit $X$ le nombre de succès obtenus. On dit que $X$ est la *variable aléatoire* associée à ce schéma.

**Définition :**
Soit un schéma de Bernoulli de paramètres $n$ et $p$ et soit $X$ le nombre de succès obtenus. On dit que $X$ est la *variable aléatoire* associée à ce schéma. On dit aussi que la variable aléatoire $X$ suit une *loi binomiale* de paramètres $n$ et $p$.

**Définition :**
Soit un schéma de Bernoulli de paramètres $n$ et $p$ et soit $X$ le nombre de succès obtenus. On dit que $X$ est la *variable aléatoire* associée à ce schéma. On dit aussi que la variable aléatoire $X$ suit une *loi binomiale* de paramètres $n$ et $p$.
Si $k$ est un entier compris entre 0 et $n$, l'événement « on a obtenu $k$ succès » est noté

**Définition :**
Soit un schéma de Bernoulli de paramètres $n$ et $p$ et soit $X$ le nombre de succès obtenus. On dit que $X$ est la *variable aléatoire* associée à ce schéma. On dit aussi que la variable aléatoire $X$ suit une *loi binomiale* de paramètres $n$ et $p$.
Si $k$ est un entier compris entre 0 et $n$, l'événement « on a obtenu $k$ succès » est noté $X = k$ et sa probabilité est notée

**Définition :**
Soit un schéma de Bernoulli de paramètres $n$ et $p$ et soit $X$ le nombre de succès obtenus. On dit que $X$ est la *variable aléatoire* associée à ce schéma. On dit aussi que la variable aléatoire $X$ suit une *loi binomiale* de paramètres $n$ et $p$.
Si $k$ est un entier compris entre 0 et $n$, l'événement « on a obtenu $k$ succès » est noté $X = k$ et sa probabilité est notée $P(X = k)$.

**Exemple :**
On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres

**Exemple :**
On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$.

**Exemple :**

On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$. La variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$.

**Exemple :**
On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$. La variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$.
On a $P(X = 2) =$

**Exemple :**

On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$. La variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$.
On a $P(X = 2) = P(SS\bar{S} \cap S\bar{S}S \cap SS\bar{S})$ car trois chemins permettent d'obtenir deux succès c'est à dire deux objets défectueux.

**Exemple :**
On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$. La variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$.
On a $P(X = 2) = P(SS\bar{S} \cap S\bar{S}S \cap SS\bar{S})$ car trois chemins permettent d'obtenir deux succès c'est à dire deux objets défectueux.
D'où $P(X = 2) =$

**Exemple :**
On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$. La variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$.
On a $P(X = 2) = P(SS\bar{S} \cap S\bar{S}S \cap SS\bar{S})$ car trois chemins permettent d'obtenir deux succès c'est à dire deux objets défectueux.
D'où $P(X = 2) = P(SS\bar{S}) + P(S\bar{S}S) + P(SS\bar{S})$

**Exemple :**
On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$. La variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$.
On a $P(X = 2) = P(SS\bar{S} \cap S\bar{S}S \cap SS\bar{S})$ car trois chemins permettent d'obtenir deux succès c'est à dire deux objets défectueux.
D'où $P(X = 2) = P(SS\bar{S}) + P(S\bar{S}S) + P(SS\bar{S})$ donc

**Exemple :**
On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$. La variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$.
On a $P(X = 2) = P(SS\bar{S} \cap S\bar{S}S \cap SS\bar{S})$ car trois chemins permettent d'obtenir deux succès c'est à dire deux objets défectueux.
D'où $P(X = 2) = P(SS\bar{S}) + P(S\bar{S}S) + P(SS\bar{S})$ donc
$P(X = 2) = 0,05^2 \times 0,95 + 0,95 \times 0,05 \times 0,95 + 0,95 \times 0,05^2 =$

**Exemple :**
On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$. La variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$.
On a $P(X = 2) = P(SS\bar{S} \cap S\bar{S}S \cap SS\bar{S})$ car trois chemins permettent d'obtenir deux succès c'est à dire deux objets défectueux.
D'où $P(X = 2) = P(SS\bar{S}) + P(S\bar{S}S) + P(SS\bar{S})$ donc $P(X = 2) = 0,05^2 \times 0,95 + 0,95 \times 0,05 \times 0,95 + 0,95 \times 0,05^2 = 3 \times 0,05^2 \times 0,95 = 0,007$

**Exemple :**

On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$. La variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$.
On a $P(X = 2) = P(SS\bar{S} \cap S\bar{S}S \cap SS\bar{S})$ car trois chemins permettent d'obtenir deux succès c'est à dire deux objets défectueux.
D'où $P(X = 2) = P(SS\bar{S}) + P(S\bar{S}S) + P(SS\bar{S})$ donc $P(X = 2) = 0,05^2 \times 0,95 + 0,95 \times 0,05 \times 0,95 + 0,95 \times 0,05^2 = 3 \times 0,05^2 \times 0,95 = 0,007$ soit une probabilité très faible de 0,007 d'avoir deux produits défectueux.

**Calcul pratique de $P(X = k)$ et $P(X \leq k)$ :**
Soit $X$ une variable aléatoire de paramètres $n$ et $p$. Pour $k$ allant de 0 à $n$, pour calculer $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$, on utilise une calculatrice :

**Calcul pratique de $P(X = k)$ et $P(X \leq k)$ :**
Soit $X$ une variable aléatoire de paramètres $n$ et $p$. Pour $k$ allant de 0 à $n$, pour calculer $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$, on utilise une calculatrice :

- Sur Texas instrument : aller dans le menu $\boxed{\text{2nd}}\boxed{\text{distrib}}$, choisir $\boxed{\text{binomFdp}}$ et taper $\boxed{\text{n}}\boxed{,}\boxed{\text{p}}\boxed{,}\boxed{\text{k}}\boxed{)}$ pour calculer $P(X = k)$ et choisir $\boxed{\text{binomFRép}}$ et taper $\boxed{\text{n}}\boxed{,}\boxed{\text{p}}\boxed{,}\boxed{\text{k}}\boxed{)}$ pour calculer $P(X \leq k)$.
- Sur Casio : aller dans le menu $\boxed{\text{STAT}}$ puis $\boxed{\text{DIST}}$ puis $\boxed{\text{BINM}}$. Sélectionner alors $\boxed{\text{Bpd}}$ puis $\boxed{\text{Var}}$ pour variable, puis entrer alors $k$ dans la ligne « x », $n$ dans la ligne « numtrial » et $p$ dans la ligne « p » puis aller sur « execute » pour valider et calculer ainsi $P(X = k)$. Pour le calcul de $P(X \leq k)$, on utilisera $\boxed{\text{Bcd}}$ au lieu de $\boxed{\text{Bpd}}$.

**Exemple :**
On considère une variable aléatoire $X$ suivant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,4$.
Sur TI, la probabilité $P(X \leq 3)$ est donnée par

**Exemple :**
On considère une variable aléatoire $X$ suivant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,4$.
Sur TI, la probabilité $P(X \leq 3)$ est donnée par `binomFrép(4,0.4,3)`.

**Remarques :**

- On a $P(X < 3) =$

**Remarques :**

- On a $P(X < 3) = P(X \leq 2)$ ;
- pour calculer $P(X > k)$, on calcule

**Remarques :**

- On a $P(X < 3) = P(X \leq 2)$ ;
- pour calculer $P(X > k)$, on calcule $1 - P(X \leq k)$.

**Définition :**
Lorsqu'on simule un « grand nombre de fois » un schéma de Bernoulli de paramètres $n$ et $p$, la moyenne du nombre de succès par schéma se rapproche d'un réel appelé *espérance mathématique* de la variable aléatoire $X$ que l'on note $E(X)$.

**Propriété :**
L'espérance mathématique de la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ est :

**Propriété :**
L'espérance mathématique de la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ est :
$$E(X) = np$$

**Exemple :**
Pour le problème de la chaîne de production, en prélevant $n = 100$ produits indépendamment, la loi binomiale a pour paramètres $n = 100$ et $p = 0,05$. On a alors
$E(X) =$

**Exemple :**
Pour le problème de la chaîne de production, en prélevant $n = 100$ produits indépendamment, la loi binomiale a pour paramètres $n = 100$ et $p = 0,05$. On a alors $E(X) = np = 100 \times 0,05 = 5$ ce qui signifie que l'on peut prévoir 5 produits défectueux pour un prélèvements de 100 produits indépendants.