

Schéma de Bernoulli et loi binomiale, cours, première STMG

1 Schéma de Bernoulli

Définition :

Deux expériences sont dites si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.

Exemple :

il y a indépendance lorsqu'on

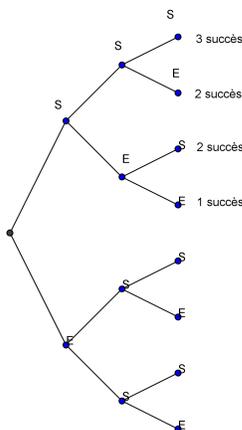
Définition :

On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues ; l'une appelée « » et l'autre appelée « ». On note p la probabilité de et q la probabilité $q = \dots\dots\dots$. La répétition de cette expérience n fois de manière constitue un de paramètres et

Propriété :

Dans un schéma de Bernoulli, la probabilité d'une liste de résultats est des probabilités de chaque résultat.

Exemple :



On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève 3 produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité $p = 0,05$ d'être défectueux.

Sur l'arbre ci-dessus représentant un schéma de Bernoulli de paramètres $n = \dots$ et $p = \dots$, la probabilité d'avoir les deux premières expériences qui donnent un succès et la dernière qui donne un échec est $P(SS\bar{S}) = \dots\dots\dots$

soit une probabilité de d'avoir deux produits défectueux sur les trois prélevés.

2 Loi binomiale

Définition :

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et soit X le nombre de succès obtenu. On dit que X est la associée à ce schéma. On dit aussi que la variable aléatoire X suit une de paramètres et

Si k est un entier compris entre 0 et n , l'événement « on a obtenu k succès » est noté et sa probabilité est notée

Exemple :

On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = \dots$ et $p = \dots$.

On a $P(X = 2) = \dots$

car chemins permettent d'obtenir deux succès c'est à dire deux objets défectueux.

D'où $P(X = 2) = P(\dots) + P(\dots) + P(\dots)$

donc $P(X = 2) = \dots$

soit une probabilité très faible de 0,007 d'avoir deux produits défectueux.

Calcul pratique de $P(X = k)$ et $P(X \leq k)$:

Soit X une variable aléatoire de paramètres n et p . Pour k allant de 0 à n , pour calculer $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$, on utilise une calculatrice :

- Sur Texas instrument : aller dans le menu `2nd` `distrib`, choisir `binomFdp` et taper `n`, `p`, `k`) pour calculer $P(X = k)$ et choisir `binomFRép` et taper `n`, `p`, `k`) pour calculer $P(X \leq k)$.
- Sur Casio : aller dans le menu `STAT` puis `DIST` puis `BINM`. Sélectionner alors `Bpd` puis `Var` pour variable, puis entrer alors k dans la ligne « x », n dans la ligne « numtrial » et p dans la ligne « p » puis aller sur « execute » pour valider et calculer ainsi $P(X = k)$. Pour le calcul de $P(X \leq k)$, on utilisera `Bcd` au lieu de `Bpd`.

Remarques :

- On a $P(X < 3) = P(X \leq 2)$
- pour calculer $P(X > k)$, on calcule $1 - P(X \leq k)$.

Définition :

Lorsqu'on simule un « grand nombre de fois » un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , la moyenne du nombre de succès par schéma se rapproche d'un réel appelé de la variable aléatoire X que l'on note

Propriété :

L'espérance mathématique de la loi binomiale de paramètres n et p est :

.....