

Loi binomiale, cours, première STMG

F.Gaudon

6 mai 2015

Table des matières

1	Schéma de Bernoulli	2
2	Loi binomiale	3

1 Schéma de Bernoulli

Définition :

Deux expériences sont dites indépendantes si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.

Exemple :

il y a indépendance lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

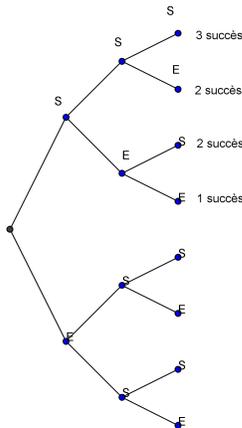
Définition :

On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues ; l'une appelée « succès » et l'autre appelée « échec ». On note p la probabilité de succès et q la probabilité d'échec ($q = 1 - p$). La répétition de cette expérience n fois de manière indépendante constitue *un schéma de Bernoulli* de paramètres n et p .

Propriété :

Dans un schéma de Bernoulli, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat

Exemple :



On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève 3 produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité $p = 0,05$ d'être défectueux.

Sur l'arbre ci-dessus représentant un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$, la probabilité d'avoir les deux premières expériences qui donnent un succès et la dernière qui donne un échec est $P(SS\bar{S}) = 0,05^2 \times 0,95 \approx 0,002$

soit 0,2 % de chances d'avoir deux produits défectueux sur les trois prélevés.

2 Loi binomiale

Définition :

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et soit X le nombre de succès obtenus. On dit que X est la *variable aléatoire* associée à ce schéma. On dit aussi que la variable aléatoire X suit une *loi binomiale* de paramètres n et p .

Si k est un entier compris entre 0 et n , l'événement « on a obtenu k succès » est noté $X = k$ et sa probabilité est notée $P(X = k)$.

Exemple :

On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$.

On a $P(X = 2) = P(SS\bar{S} \cap S\bar{S}S \cap S\bar{S}\bar{S})$

car trois chemins permettent d'obtenir deux succès c'est à dire deux objets défectueux.

D'où $P(X = 2) = P(SS\bar{S}) + P(S\bar{S}S) + P(S\bar{S}\bar{S})$

donc $P(X = 2) = 0,05^2 \times 0,95 + 0,95 \times 0,05 \times 0,95 + 0,95 \times 0,05^2 = 3 \times 0,05^2 \times 0,95 = 0,007$

soit une probabilité très faible de 0,007 d'avoir deux produits défectueux.

Calcul pratique de $P(X = k)$ et $P(X \leq k)$:

Soit X une variable aléatoire de paramètres n et p . Pour k allant de 0 à n , pour calculer $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$, on utilise une calculatrice :

- Sur Texas instrument : aller dans le menu `2nd` `distrib`, choisir `binomFdp` et taper `n`, `p`, `k` pour calculer $P(X = k)$ et choisir `binomFRép` et taper `n`, `p`, `k` pour calculer $P(X \leq k)$.
- Sur Casio : aller dans le menu `STAT` puis `DIST` puis `BINM`. Sélectionner alors `Bpd` puis `Var` pour variable, puis entrer alors k dans la ligne « x », n dans la ligne « numtrial » et p dans la ligne « p » puis aller sur « execute » pour valider et calculer ainsi $P(X = k)$. Pour le calcul de $P(X \leq k)$, on utilisera `Bcd` au lieu de `Bpd`.

Exemple :

On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,4$. Sur TI, la probabilité $P(X \leq 3)$ est donnée par `binomFrép(4,0.4,3)`.

Remarques :

- On a $P(X < 3) = P(X \leq 2)$
- pour calculer $P(X > k)$, on calcule $1 - P(X \leq k)$.

Définition :

Lorsqu'on simule un « grand nombre de fois » un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , la moyenne du nombre de succès par schéma se rapproche d'un réel appelé *espérance mathématique* de la variable aléatoire X que l'on note $E(X)$.

Propriété :

L'espérance mathématique de la loi binomiale de paramètres n et p est :

$$E(X) = np$$

Exemple :

Pour le problème de la chaîne de production, en prélevant $n = 100$ produits indépendamment, la loi binomiale a pour paramètres $n = 100$ et $p = 0,05$. On a alors $E(X) = np = 100 \times 0,05 = 5$ ce qui signifie que l'on peut prévoir 5 produits défectueux pour un prélèvement de 100 produits indépendants.