Dérivation et étude des fonctions polynômes du second degré

Études de fonctions polynômes de degré deux

F.Gaudon

http://mathsfg.net.free.fr

25 janvier 2015

Définition :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels et a non nul.

Définition :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels et a non nul. On appelle *fonction dérivée de f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

Définition :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels et a non nul. On appelle *fonction dérivée de f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2ax + b$.

Définition :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels et a non nul. On appelle *fonction dérivée de f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2ax + b$. Pour tout x_0 réel, $f'(x_0)$ est appelé

Définition :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels et a non nul. On appelle *fonction dérivée de f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2ax + b$. Pour tout x_0 réel, $f'(x_0)$ est appelé *nombre dérivé de f en x_0*.

Exemple :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 9$.

Exemple :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 9$.
Alors $f'(x) = 6x - 5$.

Propriété, variations :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ et I un intervalle.

Propriété, variations :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ et I un intervalle.

- Si pour tout réel $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors la fonction f est

Propriété, variations :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ et I un intervalle.

- Si pour tout réel $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I ;
- si pour tout réel $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors la fonction f est

Propriété, variations :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ et I un intervalle.

- Si pour tout réel $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I ;
- si pour tout réel $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Exemple :
Soit f définie pour tout réel x par $f(x) = 3x^2 - x + 2$.
On a $f'(x) =$

Exemple :
Soit f définie pour tout réel x par $f(x) = 3x^2 - x + 2$.
On a $f'(x) = 6x - 1$.
Or $6x - 1 = 0$ pour

Exemple :
Soit f définie pour tout réel x par $f(x) = 3x^2 - x + 2$.
On a $f'(x) =6x - 1$.
Or $6x - 1 = 0$ pour $6x = 1$ soit $x = \frac{1}{6}$.

Exemple :
Soit f définie pour tout réel x par $f(x) = 3x^2 - x + 2$.
On a $f'(x) = 6x - 1$.
Or $6x - 1 = 0$ pour $6x = 1$ soit $x = \frac{1}{6}$.
On a donc le tableau de variations suivant dans lequel on fait apparaître le signe de $f'(x)$ qui est une fonction affine :

Exemple :
Soit f définie pour tout réel x par $f(x) = 3x^2 - x + 2$.
On a $f'(x) = 6x - 1$.
Or $6x - 1 = 0$ pour $6x = 1$ soit $x = \frac{1}{6}$.
On a donc le tableau de variations suivant dans lequel on fait apparaître le signe de $f'(x)$ qui est une fonction affine :

Exemple :

Soit f définie pour tout réel x par $f(x) = 3x^2 - x + 2$.

On a $f'(x) = 6x - 1$.

Or $6x - 1 = 0$ pour $6x = 1$ soit $x = \frac{1}{6}$.

On a donc le tableau de variations suivant dans lequel on fait apparaître le signe de $f'(x)$ qui est une fonction affine :

x	$-\infty$	$\frac{1}{6}$	$+\infty$

Exemple :

Soit f définie pour tout réel x par $f(x) = 3x^2 - x + 2$.
On a $f'(x) = 6x - 1$.
Or $6x - 1 = 0$ pour $6x = 1$ soit $x = \frac{1}{6}$.
On a donc le tableau de variations suivant dans lequel on fait apparaître le signe de $f'(x)$ qui est une fonction affine :

x	$-\infty$	$\frac{1}{6}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$			

Exemple :
Soit f définie pour tout réel x par $f(x) = 3x^2 - x + 2$.
On a $f'(x)$ =$6x - 1$.
Or $6x - 1 = 0$ pour $6x = 1$ soit $x = \frac{1}{6}$.
On a donc le tableau de variations suivant dans lequel on fait apparaître le signe de $f'(x)$ qui est une fonction affine :

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		-	0	+	

Exemple :
Soit f définie pour tout réel x par $f(x) = 3x^2 - x + 2$.
On a $f'(x) = 6x - 1$.
Or $6x - 1 = 0$ pour $6x = 1$ soit $x = \frac{1}{6}$.
On a donc le tableau de variations suivant dans lequel on fait apparaître le signe de $f'(x)$ qui est une fonction affine :

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		-	0	+	
variations de f		$\searrow$	$\approx 1,92$	$\nearrow$	

Définition :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère et A un point d'abscisse x_A.

Définition :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère et A un point d'abscisse x_A. On appelle *tangente au point A* à la courbe $\mathcal{C}$ la droite passant par

Définition :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère et A un point d'abscisse x_A. On appelle *tangente au point A* à la courbe $\mathcal{C}$ la droite passant par A et de coefficient directeur

Définition :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère et A un point d'abscisse x_A. On appelle *tangente au point A* à la courbe $\mathcal{C}$ la droite passant par A et de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(x_A)$.

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$ et A le point de coordonnées $(-1; 1)$.

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$ et A le point de coordonnées $(-1; 1)$.
$A \in \mathcal{C}$ car

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$ et A le point de coordonnées $(-1; 1)$.
$A \in \mathcal{C}$ car $x_A^2 = (-1)^2 = 1 = y_A$.

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$ et A le point de coordonnées $(-1; 1)$.
$A \in \mathcal{C}$ car $x_A^2 = (-1)^2 = 1 = y_A$.
Par ailleurs $f'(x) =$

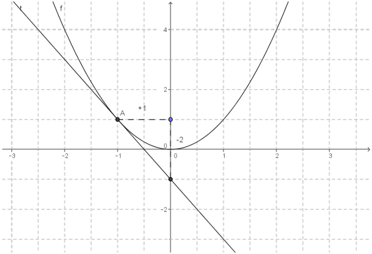
Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$ et A le point de coordonnées $(-1; 1)$.
$A \in \mathcal{C}$ car $x_A^2 = (-1)^2 = 1 = y_A$.
Par ailleurs $f'(x) =2x$ et $f'(-1) =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$ et A le point de coordonnées $(-1; 1)$.
$A \in \mathcal{C}$ car $x_A^2 = (-1)^2 = 1 = y_A$.
Par ailleurs $f'(x) = 2x$ et $f'(-1) = -2$.

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$ et A le point de coordonnées $(-1; 1)$.
$A \in \mathcal{C}$ car $x_A^2 = (-1)^2 = 1 = y_A$.
Par ailleurs $f'(x) = 2x$ et $f'(-1) = -2$.
Donc la tangente à la courbe au point A est la droite passant par A et de coefficient directeur

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$ et A le point de coordonnées $(-1; 1)$.
$A \in \mathcal{C}$ car $x_A^2 = (-1)^2 = 1 = y_A$.
Par ailleurs $f'(x) = 2x$ et $f'(-1) = -2$.
Donc la tangente à la courbe au point A est la droite passant par A et de coefficient directeur -2.


t
f
A
+1
-2
4
2
0
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3

Remarque :
La *tangente* à une courbe en un point A de cette courbe est la droite qui "approche le mieux" la courbe en ce point.

Propriété :
La tangente à une courbe en un point $A(x_A; y_A)$ de cette courbe a pour équation réduite $y = mx + p$ avec :

Propriété :
La tangente à une courbe en un point $A(x_A; y_A)$ de cette courbe a pour équation réduite $y = mx + p$ avec :

$$m = f'(x_A)$$

Propriété :
La tangente à une courbe en un point $A(x_A; y_A)$ de cette courbe a pour équation réduite $y = mx + p$ avec :

$$m = f'(x_A)$$

et

$$p = y_A - mx_A$$

Propriété :
La tangente à une courbe en un point $A(x_A; y_A)$ de cette courbe a pour équation réduite $y = mx + p$ avec :

$$m = f'(x_A)$$

et

$$p = y_A - mx_A$$

Exemple :
f définie par $f(x) = x^2$ et $A(-1; 1)$.

Exemple :
f définie par $f(x) = x^2$ et $A(-1; 1)$.
On a vu que $f'(-1) =$

Exemple :
f définie par $f(x) = x^2$ et $A(-1; 1)$.
On a vu que $f'(-1) = -2$.

Exemple :
f définie par $f(x) = x^2$ et $A(-1; 1)$.
On a vu que $f'(-1) = -2$.
Par ailleurs, $p = y_A - mx_A =$

Exemple :
f définie par $f(x) = x^2$ et $A(-1;1)$.
On a vu que $f'(-1) = -2$.
Par ailleurs, $p = y_A - mx_A = 1 - (-2) \times (-1) = -1$.

Exemple :

f définie par $f(x) = x^2$ et $A(-1; 1)$.
On a vu que $f'(-1) = -2$.
Par ailleurs, $p = y_A - mx_A = 1 - (-2) \times (-1) = -1$.
D'où l'équation $y = -2x - 1$.

Propriété :
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

Propriété :
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

- si $\Delta < 0$, $f(x)$ est

Propriété :
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

- si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas ;

Propriété :
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

- si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas ;
- si $\Delta = 0$, alors $f(x)$ est

Propriété :
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

- si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas ;
- si $\Delta = 0$, alors $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $x_0 = \frac{-b}{2a}$ uniquement ;

Propriété :
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

- si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas ;
- si $\Delta = 0$, alors $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $x_0 = \frac{-b}{2a}$ uniquement ;
- si $\Delta > 0$, $f(x)$ est

Propriété :
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

- si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas ;
- si $\Delta = 0$, alors $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $x_0 = \frac{-b}{2a}$ uniquement ;
- si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines

Propriété :
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

- si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas ;
- si $\Delta = 0$, alors $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $x_0 = \frac{-b}{2a}$ uniquement ;
- si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et du signe opposé à l'intérieur.

Exemple :
Résolution de $-x^2 + 6 + 7 \geq 0$.

Exemple :

Résolution de $-x^2 + 6 + 7 \geq 0$.

- Résolution de $-x^2 + 6x + 7 = 0$:

Exemple :

Résolution de $-x^2 + 6 + 7 \geq 0$.

- Résolution de $-x^2 + 6x + 7 = 0$:
  On a $\Delta =$

Exemple :

Résolution de $-x^2 + 6 + 7 \geq 0$.

- Résolution de $-x^2 + 6x + 7 = 0$:
  On a $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times (-1) \times 7 = 64$.
  $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes :

Exemple :
Résolution de $-x^2+6+7 \geq 0$.

- Résolution de $-x^2+6x+7=0$:
  On a $\Delta = b^2-4ac=36-4\times(-1)\times 7=64$.
  $\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes :
  $x_1=\frac{-6+8}{-2}=-1$

Exemple :
Résolution de $-x^2 + 6 + 7 \geq 0$.

- Résolution de $-x^2 + 6x + 7 = 0$:
  On a $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times (-1) \times 7 = 64$.
  $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes :
  $x_1 = \frac{-6+8}{-2} = -1$
  $x_2 = \frac{-6-8}{-2} = 7$.

Exemple (suite) :

- Étude du signe :

Exemple (suite) :

- Étude du signe :

Exemple (suite) :

- Étude du signe :

x	$-\infty$	-1	7	$+\infty$

Exemple (suite) :

- Étude du signe :

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
$-x^2+6x+7$		-	0	+	0	-	

Donc

Exemple (suite) :

- Étude du signe :

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
$-x^2+6x+7$		-	0	+	0	-	

Donc $S = [-1; 7]$

Propriété :
Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont les abscisses des points d'intersection s'ils existent de la parabole représentant la fonction f et de l'axe des abscisses.

Propriété :

- Si $\Delta > 0$, la courbe coupe l'axe des

Propriété :

- Si $\Delta > 0$, la courbe coupe l'axe des abscisses en deux points distincts ;
- si $\Delta = 0$, la courbe a

Propriété :

- Si $\Delta > 0$, la courbe coupe l'axe des abscisses en deux points distincts ;
- si $\Delta = 0$, la courbe a pour unique point commun avec l'axe des abscisses son sommet ;
- si $\Delta < 0$, la courbe

Propriété :

- Si $\Delta > 0$, la courbe coupe l'axe des abscisses en deux points distincts ;
- si $\Delta = 0$, la courbe a pour unique point commun avec l'axe des abscisses son sommet ;
- si $\Delta < 0$, la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses.

Propriété :
En outre,

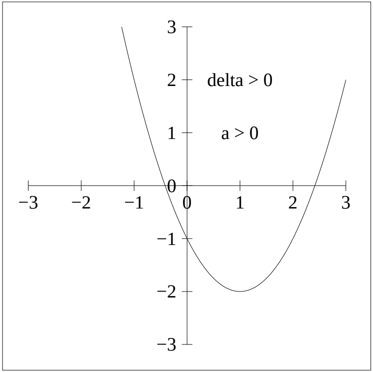
- Si $a > 0$, alors

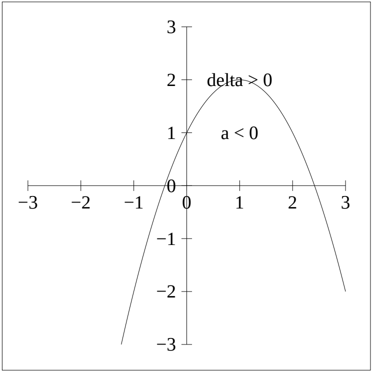
Propriété :
En outre,

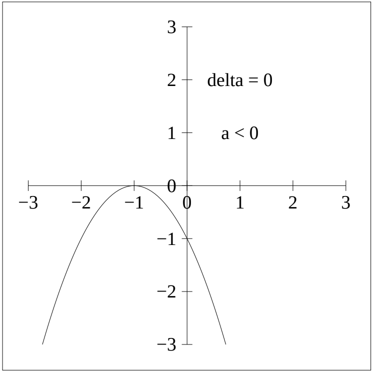
- Si $a > 0$, alors la parabole a ses branches tournées vers le haut
- si $a < 0$, alors

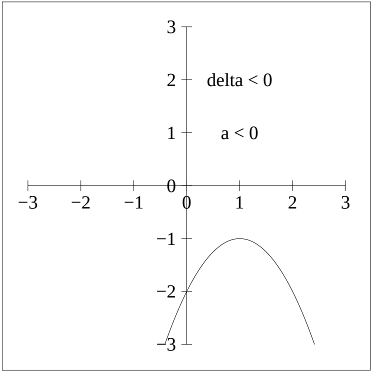
Propriété :
En outre,

- Si $a > 0$, alors la parabole a ses branches tournées vers le haut
- si $a < 0$, alors les branches sont tournées vers le bas.


delta > 0
a > 0


delta > 0
a < 0


delta = 0
a < 0
−3
−2
−1
0
1
2
3


delta < 0
a < 0
−3
−2
−1
0
1
2
3