Dérivation et étude de fonctions, cours, première STMG

F.Gaudon

25 janvier 2015

Table des matières

1 Fonctions polynômes du second degré 2

2 Fonctions polynômes du troisième degré 3

1 Fonctions polynômes du second degré

Définition :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels et a non nul. On appelle *fonction dérivée de f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2ax + b$. Pour tout x_0 réel, $f'(x_0)$ est appelé *nombre dérivé de f en x_0*.

Exemple :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 9$.
Alors $f'(x) = 6x - 5$.

Propriété, variations :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ et I un intervalle.

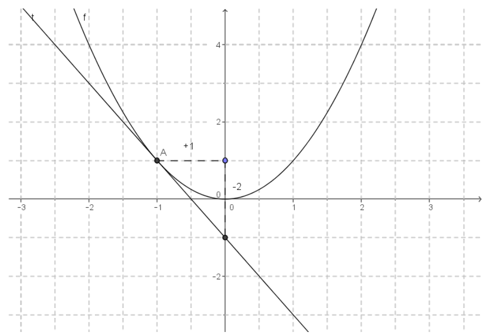
- Si pour tout réel $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I ;
- si pour tout réel $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Exemple :
Soit f définie pour tout réel x par $f(x) = 3x^2 - x + 2$.
On a $f'(x) = 6x - 1$.
Or $6x - 1 = 0$ pour $6x = 1$ soit $x = \frac{1}{6}$.
On a donc le tableau de variations suivant dans lequel on fait apparaître le signe de $f'(x)$ qui est une fonction affine :

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		-	0	+	
variations de f		$\searrow$	$\approx 1,92$	$\nearrow$	

Définition :
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_{\{}$ sa courbe représentative dans un repère et A un point d'abscisse x_A. On appelle *tangente au point A à la courbe $\mathcal{C}_f$* la droite passant par A et de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(x_A)$.

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$ et A le point de coordonnées $(-1; 1)$.
$A \in \mathbb{C}_f$ car $x_A^2 = (-1)^2 = 1 = y_A$.
Par ailleurs $f'(x) = 2x$ et $f'(-1) = -2$.
Donc la tangente à la courbe au point A est la droite passant par A et de coefficient directeur -2.



Remarque :
La *tangente* à une courbe en un point A de cette courbe est la droite qui "approche le mieux" la courbe en ce point.

Propriété :
La tangente à une courbe en un point $A(x_A; y_A)$ de cette courbe a pour équation réduite $y = mx + p$ avec :

$$m = f'(x_A)$$

et

$$p = y_A - mx_A$$

2 Fonctions polynômes du troisième degré

Définition :
Une fonction polynôme du troisième degré est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c, d sont des réels avec a non nul.

Propriété :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des réels avec a non nuls. La fonction dérivée de f, notée f', est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Exemple :
Soit f définie pour tout réel x par $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 4x + 8$.
Alors $f'(x) = 15x^2 + 4x - 4$.

Propriété, variations :
Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie sur $\mathbb{R}$ et I un intervalle.

- Si pour tout réel $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I ;
- si pour tout réel $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Exemple :
Soit f définie pour tout réel x par $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.
Alors $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$. f' est une fonction polynôme du second degré.
On résout l'équation $3x^2 - 2x + 1 = 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 > 0$.
Il y a deux solutions réelles :
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{6} = 1$
et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$.
On sait que le trinôme est du signe de a donc positif à l'extérieur des racines.
D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\approx -0,81$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	