Nombre dérivé et tangentes à une courbe, cours, première STI2D

F.Gaudon

28 juin 2015

Table des matières

1 Nombre dérivé

On considère une fonction f définie sur un intervalle I non vide ainsi que deux réels x_A et h avec $h \neq 0$ tels que $x_A \in I$ et $x_A + h \in I$.

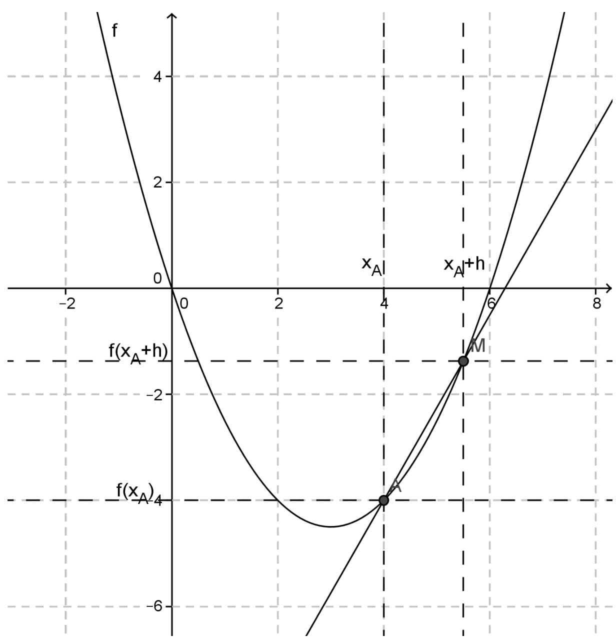
Définition :

Le *taux d'accroissement* de f entre x_A et $x_A + h$ est le nombre :

$$\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h}$$

définition :

Lorsque le taux d'accroissement tend vers un réel quand h tend vers 0, on dit que f admet un *nombre dérivé en x_A*. Ce nombre dérivé est noté $f'(x_A)$. On dit aussi que f *est dérivable en x_A*.



Exemple de savoir faire :
[Utiliser un taux d'accroissement pour calculer un nombre dérivé]
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On cherche à calculer le nombre dérivée de f en 3.

- On calcule le taux d'accroissement pour $x_A = 3$ en fonction de h : on a pour tout h réel non nul $\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2-3^2}{h^2} = \frac{3^2+2\times 3h+h^2-3^2}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = 6 + h$
- On fait tendre h vers 0 : le taux tend vers 6 quand h tend vers 0.
  Donc 6 est le nombre dérivé de $x \longmapsto x^2$ en 3 et on note $f'(3) = 6$.

2 Tangente à une courbe

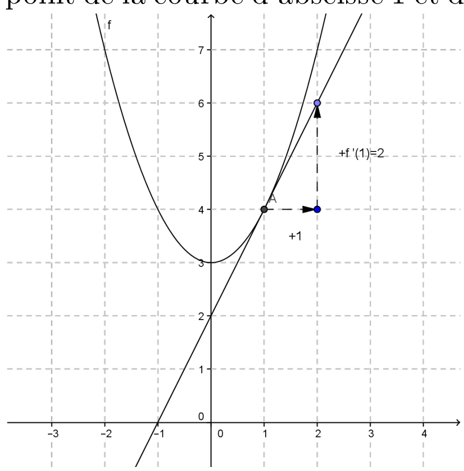
Définition :

Si f est dérivable en x_A dans un repère, *la tangente* $\mathcal{T}$ à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f en x_A est la droite qui a pour coefficient directeur $f'(x_A)$ et qui passe par le point A de coordonnées $(x_A; f(x_A))$.

Exemple de savoir faire :

[Calculer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe en un point et la tracer]
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3$. On cherche à tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

- On calcule le taux d'accroissement en 1 : on a pour tout h réel : $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1^2+2\times h+h^2-1^2}{h} = 2 + h$
- On fait tendre h vers 0 pour obtenir le nombre dérivé en 1 : $f'(1) = 2$
- On trace la droite passant par le point de la courbe d'abscisse 1 et de coefficient directeur $f'(1) = 2$:



Propriété :

La tangente en A d'abscisse x_A à $\mathcal{C}_f$ a pour équation

$$y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$$

Preuve :

Soit $A(x_A; f(x_A))$ et soit $M(x; y)$ un point avec $x \in I$. Alors M appartient à la tangente en A si et seulement si $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ de coordonnées $(1; f'(x_A))$, qui dirige la tangente, sont colinéaires. Cela signifie encore que $(x - x_A) \times f'(x_A) - 1 \times (y - f(x_A)) = 0$ c'est à dire $y = f(x_A) + f'(x_A)(x - x_A)$

Exemple de savoir faire :

[Calculer l'équation réduite de la tangente en un point d'abscisse donnée] On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3$ et la tangente au point d'abscisse 1 vue plus haut. On a donc $x_A = 1$ et $f'(x_A) = f'(1) = 2$ d'après le calcul fait plus haut.
En outre $f(x_A) = 1^2 + 3 = 4$ d'où l'équation est $y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$ donc $y = 2(x - 1) + 4$ c'est à dire $y = 2x + 2$.