Fonctions de référence et fonctions associées, cours, première STI2D

F.Gaudon

28 juin 2015

Table des matières

1 Fonctions de référence

1.1 Fonction carré

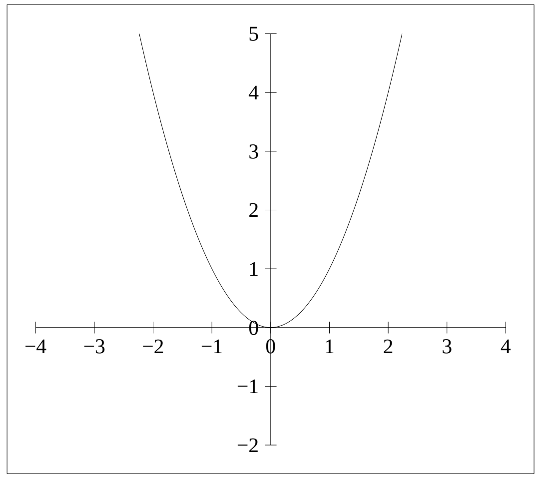
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$;
- définie pour tout x réel par $x \longmapsto x^2$;
- strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$;
- positive sur $]-\infty; +\infty[$;
- représentée graphiquement par une *parabole*.

Variations :

x	$-\infty$		0	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

Signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	



1.2 Fonction inverse

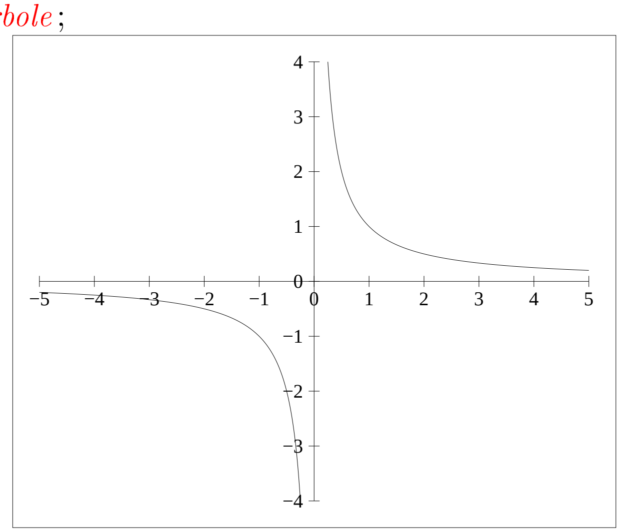
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$;
- définie pour tout $x \neq 0$ par $x \longmapsto \frac{1}{x}$;
- strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$;
- strictement négative sur $]-\infty; 0[$ et strictement positive sur $]0; +\infty[$;
- représentée graphiquement par une *hyperbole* ;

Variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		-	$\Vert$	-	



1.3 Fonctions affines

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$;
- définie pour tout x réel par $x \longmapsto ax + b$ où a et b sont deux réels fixés ;
- **Variations :**

$a > 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	

$a < 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	

- **Signe :**

$a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax + b$		-	0	$+$	

$a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax + b$		$+$	0	-	

- Représentée graphiquement par une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

1.4 Fonction racine carrée

Définition :

On appelle fonction *racine carrée* la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $x \mapsto \sqrt{x}$.

Variations :

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	

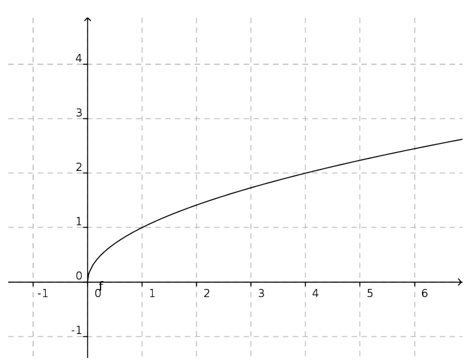
Signe :

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+$	

Preuve des variations :

Soient x_1 et x_2 deux réels positifs tels que $x_1 < x_2$. Alors $x_2 - x_1 > 0$.
Or, $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}} = \frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$. Comme $\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} > 0$ et $x_2 - x_1 > 0$ on a donc $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} > 0$ c'est à dire $x_2 > x_1$ ce qui signifie que la fonction racine carrée est une fonction strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Représentation graphique :



1.5 Fonction valeur absolue

Définition :

On appelle fonction *Valeur absolue* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

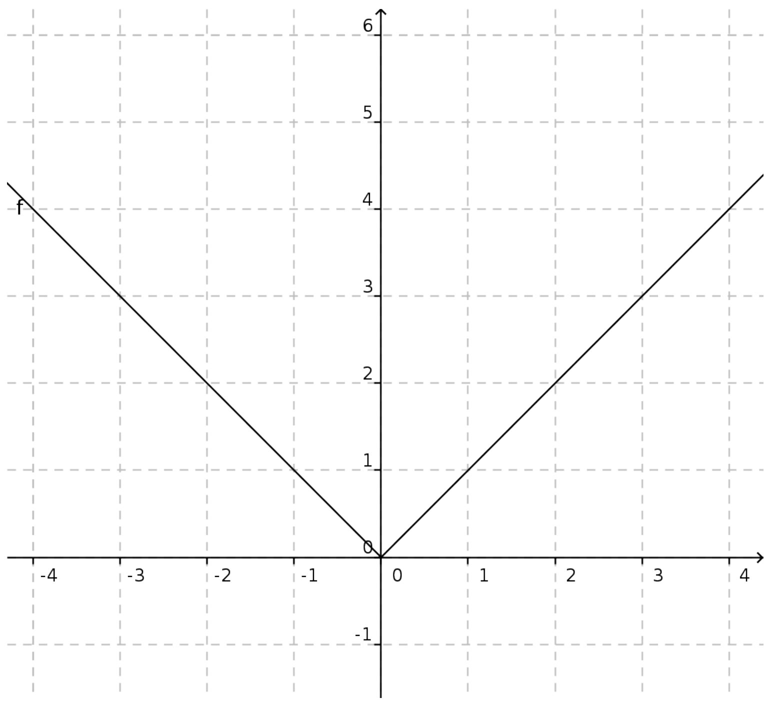
Variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$+$	0	$+$	

Représentation graphique :



Remarque :

La fonction valeur absolue est une fonction paire : sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans tout repère orthogonal du plan.

2 Fonctions associées

Propriété :

Soit u une fonction définie sur un intervalle $I = [a; b]$. Soient k et λ deux réels.
- La fonction $u+k$ définie pour tout réel x de I par $(u+k)(x) = u(x)+k$ a les mêmes variations que la fonction u sur I ;
- si $\lambda > 0$, la fonction λu définie pour tout réel x de I par $(\lambda u)(x) = \lambda u(x)$ a les mêmes variations que u sur I ;
- si $\lambda < 0$, la fonction λu a des variations contraires à celles de u sur I.
- La fonction $x \mapsto u(x + \lambda)$ est définie sur $[a - \lambda; b - \lambda]$ et a les mêmes variations que la fonction u.

Preuve :

On ne traitera que le cas où u est monotone strictement décroissante sur I, les autres cas se traitant de la même manière.
- Soient x_1 et x_2 deux réels de I tels que $x_1 < x_2$. u étant strictement décroissante sur I, on en déduit que $u(x_1) > u(x_2)$. $u(x_1) + k > u(x_2) + k$ ce qui montre que $u + k$ est aussi décroissante sur I ;
- Soient x_1 et x_2 deux réels de I tels que $x_1 < x_2$. u étant strictement décroissante sur I, on en déduit que $u(x_1) > u(x_2)$. $\lambda > 0$ donc $\lambda u(x_1) > \lambda u(x_2)$ donc λu est strictement décroissante aussi sur I ;
- Soient x_1 et x_2 deux réels de I tels que $x_1 < x_2$. u étant strictement décroissante sur I, on en déduit que $u(x_1) > u(x_2)$. $\lambda < 0$ donc $\lambda u(x_1) < \lambda u(x_2)$ donc λu est strictement croissante sur I ce qui montre la propriété dans ce cas.
- Soient x_1 et x_2 deux réels de $[a-\lambda; b-\lambda]$ avec $x_1 < x_2$. Alors $x_1+\lambda$ et $x_2+\lambda$ appartiennent à $[a; b]$ et $x_1+\lambda < x_2+\lambda$ D'où par stricte décroissance de la fonction u sur cet intervalle $u(x_1+\lambda) > u(x_2+\lambda)$ ce qui montre que la fonction définie par $x \mapsto u(x+\lambda)$ est strictement décroissante sur l' intervalle I.

Exemple de savoir faire :

[Déterminer les variations d'une fonction associée à une fonction de référence]

Soit f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = -3\sqrt{x} - 2$.
La fonction $x \mapsto -3\sqrt{x}$ a des variations contraires à celles de la fonction racine carrée sur I donc elle est strictement décroissante sur cet intervalle.
En outre, la fonction $x \mapsto -3\sqrt{x} - 2$ a les mêmes variations que $x \mapsto -3\sqrt{x}$ sur I donc f est strictement décroissante sur I.

Propriété :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.
- Si $u(x) \geq 0$, alors $|u(x)| = u(x)$;
- si $u(x) \leq 0$, alors $|u(x)| = -u(x)$.

Propriété :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan et $\mathcal{C}_u$ la représentation graphique d'une fonction u définie sur un intervalle I dans ce repère.

- Soit k un réel. La courbe représentative $\mathcal{C}_{u+k}$ de la fonction $u+k$ sur I est l'image de $\mathcal{C}_u$ par la translation de vecteur $k\vec{j}$.
- Soit λ un réel. La courbe représentative $\mathcal{C}_{u(x+\lambda)}$ de la fonction définie par $x \mapsto u(x+\lambda)$ est l'image de $\mathcal{C}_u$ par la translation de vecteur $-\lambda\vec{i}$.
- La courbe représentative $\mathcal{C}_{-u}$ de la fonction $-u$ sur I est l'image de $\mathcal{C}_u$ par la symétrie d'axe (Ox).
- La courbe représentative $\mathcal{C}_{|u|}$ de la fonction $|u|$ est confondue avec celle de$u$ sur tous les intervalles où u est positive et est symétrique à celle de u sur tous les intervalles où u est négative.

Exemple de savoir faire :

- **[Reconnaître l'expression de la fonction associée à partir d'une courbe donnée]**
  Sur la représentation graphique ci-contre, la fonction u est la fonction carré définie par $u(x) = x^2$. La fonction f a sa courbe obtenue par la translation de vecteur $3\vec{j}$ de la courbe de la fonction u. Son expression algébrique est donc $u(x) = x^2 + 3$.
- **[Tracer la courbe de la fonction dont associée à une fonction de référence dont l'expression est donnée]** Soit u la fonction définie par $u(x) = x^2$ et g la fonction définie par $g(x) = (x+3)^2$ pour tout réel x. On a $g(x) = u(x+2)$ donc la courbe de la fonction g est obtenue par la translation de vecteur $-2\vec{i}$ à partir de la courbe de la fonction carré.