Fonctions dérivées, cours, première S

F.Gaudon

27 juin 2015

Table des matières

1 Fonction dérivée et dérivées de fonctions usuelles

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est dite *dérivable sur I* si elle est dérivable en tout réel a de I.
La fonction qui, à tout réel a, associe le nombre dérivé $f'(a)$ en a, est appelée *fonction dérivée* de f et notée f'.

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$
k	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$mx+p$	m	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Preuves :

Pour tout $a \in I$ et tout $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$ on a :

- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$
  d'où la dérivée de $x \mapsto k$ est $x \mapsto 0$ en tout réel a ;
- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a+h-a}{h} = 1$
  d'où la dérivée de $x \mapsto x$ est $x \mapsto 1$ en tout réel a ;
- $\frac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h} = \frac{mh}{h} = m$
  d'où la dérivée de $x \mapsto mx+p$ est $x \mapsto m$ en tout réel a ;
- $\frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = 2a+h$
  qui tend vers $2a$ quand h tend vers 0 ;
- $\frac{(a+h)^n-a^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{k=n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}h^k}{h}$
  qui tend vers na^{n-1} quand h tend vers 0 ;
- pour la fonction inverse,

$$\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a}{a(a+h)}-\frac{a+h}{a(a+h)}}{h} = \frac{a-(a+h)}{ah(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

  qui tend vers $\frac{-1}{a^2}$ quand h tend vers 0.

- pour la fonction racine carrée,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} &= \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}\\ &= \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}\\ &= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\end{aligned}$$

qui tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ quand h tend vers 0.

Exemples :

- $x \mapsto 3x-2$ a pour fonction dérivée $x \mapsto 3$ pour tout réel x.
- $x \mapsto x^3$ a pour fonction dérivée $x \mapsto 3x^2$ pour tout réel x.

Algorithmique :

Algorithme qui trace les tangentes en des points, d'abscisses régulièrement espacées de 0,5 unités sur l'intervalle $[-3;3]$, à la courbe d'une fonction f de dérivée f'.

Données : a
Début traitement
  pour a ***allant de*** *-3* ***à*** *3* ***par pas de*** *0,5* **faire**
    y prend la valeur $f(a)$;
    m prend la valeur $f'(a)$;
    Placer le point A de coordonnées (a, y) ;
    Tracer la droite passant par A et de coefficient directeur m ;
  fin
Fin

Exemple :

On utilise ici la fonction $f : x \mapsto x^2$ de dérivée $f'(x) = 2x$.

TI :	**Casio :**	**XCas :**

ClrDraw
DispGraph
For(A,-3,3,0.5)
$A^2 \triangleright U$
$2 * A \triangleright M$
Pt-On(A,U)
Line(-5,$U + M * (-5 - A)$,5,$U + M * (5 - A)$)
End
		`tracertangentes():={`
		`local a,f,m,y, A,L,d;`
		`f(x):=x^2;`
		`pour a de -3 jusque 3`
		`pas 0.5 faire`
		`y:=f(a);`
		`m:=diff(f,x,a);`
		`A:=point(a+i*f(a));`
		`d:=droite(A,pente=m);`
		`L:=L,A,d;`
		`fpour`
		`return L;`

2 Opérations sur les fonctions dérivables

2.1 Somme

Propriété :

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, alors $u+v$ est définie et dérivable sur I et :

$$(u+v)' = u' + v'$$

Preuve :
$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$ qui tend vers $u'(a)+v'(a)$ quand h tend vers 0.

Exemple de savoir faire :
[Calculer la fonction dérivée d'une somme de fonctions dérivables]
$x \mapsto \frac{1}{x} + x^4$ a pour fonction dérivée $x \mapsto -\frac{1}{x^2} + 4x^3$ pour tout réel x non nul.

2.2 Multiplication par un nombre réel k

Propriété :

Soient u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel, alors ku est définie et dérivable sur I et :

$$(ku)' = ku'$$

Preuve :
Même démarche que la précédente.

Exemple de savoir faire :
[Calculer la fonction dérivée de la fonction produit d'une fonction par un réel]
$x \mapsto 3x^5 - 3x^2 + 3$ a pour fonction dérivée $x \mapsto 3 \times 5x^4 - 3 \times 2x + 0$ c'est à dire $x \mapsto 15x^4 - 6x$ pour tout réel x.

2.3 Produit

Propriété :

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, alors uv est dérivable sur I et

$$(uv)' = u'v + v'u$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} &= \frac{(u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}\\ &= \frac{(u(a+h)-u(a))v(a+h)}{h}+\frac{u(a)(v(a+h)-v(a))}{h}\\ &= \frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h)+u(a)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\end{aligned}$$

qui tend vers $u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$ quand h tend vers 0.

Exemple de savoir faire :
[Calculer la fonction dérivée d'un produit de fonctions dérivables]
On considère $f : x \mapsto (3x-2)\cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$. On pose $u(x) = 3x-2$ et $v(x) = \cos(x)$. Alors $u'(x) = 3$ et $v'(x) = -\sin(x)$ et $f'(x) = u'(x)v(x)+v'(x)u(x) = 3\cos(x)-(3x-2)\sin(x)$ pour tout réel x.

2.4 Quotient

Propriété :

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, avec pour tout x de I, $v(x) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est définie et dérivable sur I et

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$$

En particulier,

$$(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\frac{\frac{u}{v}(a+h)-\frac{u}{v}(a)}{h} &= \frac{\frac{u(a+h)}{v(a+h)}-\frac{u(a)}{v(a}}{h}\\ &= \frac{\frac{u(a+h)}{v(a+h)}-\frac{u(a+h)}{v(a)}+\frac{u(a+h)}{v(a)}-\frac{u(a)}{v(a)}}{h}\\ &= \frac{u(a+h)(\frac{1}{v(a+h)}-\frac{1}{v(a)})+\frac{1}{v(a)}(u(a+h)-u(a))}{h}\\ &= u(a+h)\frac{v(a)-v(a+h)}{hv(a)v(a+h)}+\frac{1}{v(a)}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\\ &= -u(a+h)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\frac{1}{v(a)v(a+h)}+\frac{1}{v(a)}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\end{aligned}$$

qui tend vers $\frac{-u(a)v'(a)}{v(a)v(a)} + \frac{u'(a)}{v(a)}$ c'est à dire $\frac{-u(a)v'(a)+u'(a)v(a)}{v(a)^2}$ quand h tend vers 0.

Exemple de savoir faire :
[Calculer la fonction dérivée d'un quotient de fonctions dérivables]
On onsidère $f : x \mapsto \frac{3x^2-x}{4-5x}$ définie pour tout réel x différent de $\frac{4}{5}$. On pose $u(x) = 3x^2 - x$ et $v(x) = 4 - 5x$. Alors $u'(x) = 6x - 1$ et $v'(x) = -5$ d'où $f'(x) = (\frac{u'v-v'u}{v^2})(x) = \frac{(6x-1)(4-5x)-(-5)(3x^2-x)}{(4-5x)^2} = \frac{24x-4-30x+5x+15x^2-5x}{(4-5x)^2} = \frac{15x^2-6x-4}{(4-5x)^2}$.