Nombres complexes, cours, première STI2D

F.Gaudon

29 juin 2015

Table des matières

1 Notion de nombre complexe

On sait depuis les babyloniens résoudre les équations dites du second degré (c'est à dire de la forme $ax^2 + bx + c = 0$). Cependant, on est resté longtemps sans méthode générale de résolution des équations du troisième degré. Ce n'est qu'au XVIe siècle qu'un mathématicien italien Tartaglia découvrit une méthode générale de résolution de ces équations. Il eut pour cela recourt à l'utilisation de ce qui fut qualifié à l'époque d'artifice : une racine carrée de -1, c'est à dire un nombre x imaginaire tel que $\sqrt{x} = -1$. Ce n'est que par la suite que ce nombre acquèrera sont statut de nombre, sera renommé i et donnera naissance aux nombres complexes qui seront étudiés en tant que nombres et permettront le développement de pans entiers des Mathématiques.

Définition :

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ et appelé *ensemble des nombres complexes* tel que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels ;
- l'addition et la multiplication des nombres complexes « prolongent » l'addition et la multiplication des nombres réels. (c'est à dire que l'addition ou la multiplication de deux nombres réels considérés comme nombres complexes est l'addition ou la multiplication usuelle sur les nombres réels) ;
- Il existe un unique nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels.

L'écriture $z = a + ib$ est appelée *forme algébrique* du nombre complexe z.

Le nombre réel a est appelé *partie réelle* du nombre complexe z et noté $\mathcal{R}e(z)$.

Le nombre réel b est appelé *partie imaginaire* du nombre complexe z et noté $\mathcal{I}m(z)$.

Si $a = 0$, le nombre z s'écrit $z = ib$ avec $b \in \mathbb{R}$. On dit alors que z est un imaginaire pur.

Exemples :

- Le réel 3 est aussi un nombre complexe, il s'écrit $3 = 3 + 0 \times i$.
- Le nombre $3 + 2i$ est un nombre complexe non réel. Sa partie imaginaire est 2 et sa partie réelle est 3.

Remarque :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

2 Opérations sur les nombres complexes

Définition :

Soient $z = a + ib$ et $z' = a'i + b'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' réels.

- On définit l'opposé de z noté $-z$ en posant $-z = -a - ib$.
- On définit l'addition des nombres complexes z et z' notée $z + z'$ en posant :

$$z + z' = a + a' + i(b + b')$$

- On définit la multiplication des nombres complexes z et z' notée zz' en posant :

$$zz = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$$

- Tout nombre complexe non nul z admet un inverse, c'est à dire un nombre z' tel que $zz' = 1$, noté $z' = \frac{1}{z}$.

Remarque :

L'addition et la multiplication dans les complexes prolongent l'addition et la multiplication dans les réels car, si z et z' sont réels, c'est $z = a$ et $z' = a'$ avec a et a' réels, alors $z + z' = a + a'$ et $zz' = aa'$.

Exemples de savoirs faire :

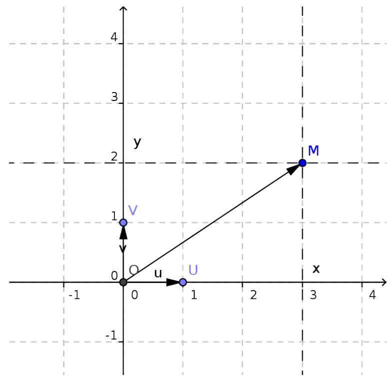
- **[Additionner des nombres complexes]** $(3 + 2i) + (5 - 4i) = 8 - 2i$;
- **[Multiplier des nombres complexes]** $(3 + 2i)(5 - 4i) = 3 \times 5 + (2i)(-4i) + 5 \times 2i - 3 \times 4i = 15 + 8 + 10i - 12i = 23 - 2i$
- **[Calculer l'affixe du quotient de deux nombres complexes]** Si $z = 3 + 2i$ et $z' = 5 + i$, alors $\frac{z'}{z} = \frac{5+i}{3+2i} = \frac{(5+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{15+3i-10i+2}{9-6i+6i+4} = \frac{17-7i}{13}$

3 Représentation géométrique des nombres complexes

Définition :

Soit $(O; \vec{u}; \vec{v})$ un repère orthonormé du plan.

- Á tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b réels, on associe le point M de coordonnées $(a; b)$. On dit que M est *le point image de M* et que $O\vec{M}$ est *le vecteur image de M*.
- Tout point M de coordonnées $(x; y)$ est le point image d'un unique complexe $z = x + iy$. On dit que z est l'affixe du point M et du vecteur $O\vec{M}$.



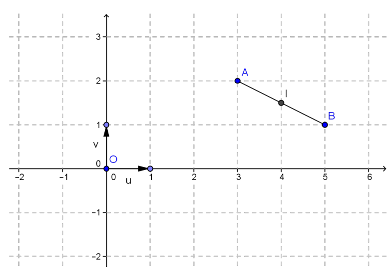
Remarques :

- Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses qui est pour cette raison aussi appelé *axe réel*.
- Les nombres imaginaires purs sont les affixes des points de l'axe des ordonnées qui est pour cette raison aussi appelé *axe imaginaire pur*.

Propriétés :

On considère deux points A et B du plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'affixes respectives z_A et z_B, alors

- le vecteur $\vec{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- L'affixe du milieu I de $[AB]$ est $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$.



Preuve :

- A et B ont pour coordonnées $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$ dans $(O;\vec{u};\vec{v})$ et par ailleurs, $z_A = x_A+iy_A$ et $z_B = x_B+iy_B$. Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(x_B-x_A;y_B-y_A)$ dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ et donc pour affixe $(x_B-x_A)+i(y_B-y_A) = z_B - z_A$ dans ce repère.
- On sait que $x_I = \frac{x_A+x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A+y_B}{2}$ et $z_I = x_I + iy_I$ d'où le résultat.

Exemple de savoir faire :

[Calculer l'abscisse du milieu d'un segment] Soient A et B les points d'affixes respectives $3+2i$ et $5+i$. Soit I le milieu de $[AB]$. Alors l'affixe de I est $z_I = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{3+2i+5+i}{2} = \frac{8+3i}{2} = 4+\frac{3}{2}i$.

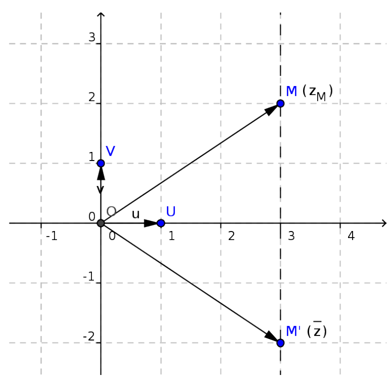
4 Conjugué d'un nombre complexe

Définition :

Pour tout nombre complexe z de forme algébrique $z = a+ib$ avec a et b réels, on appelle *conjugué de z* le nombre noté $\bar{z}$ et défini par $\bar{z} = a - ib$.

Remarque :

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$, si M est le point d'affixe z, le point M' d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.



Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes.

- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$;
- $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$;
- pour tout entier naturel n non nul, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$;
- si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$;
- si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$;

Preuve :

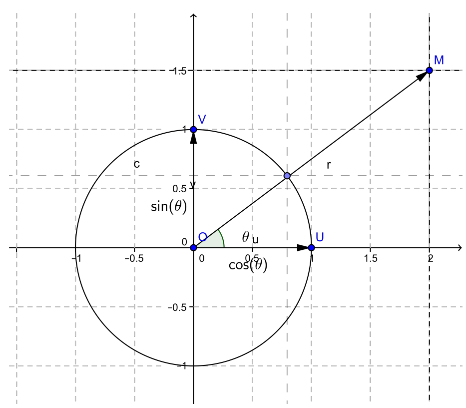
- Soient $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$. $\bar{z}+\bar{z}' = a-ib+a'-ib' = a+a'-i(b+b') = \overline{z+z'}$.
- Soient $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$. D'une part, $\overline{zz'} = \overline{(a+ib)(a'+ib')} = \overline{aa'-bb'+iba'+ib'a} = aa'-bb'-i(ba'+b'a)$ et d'autre part, $\bar{z}\bar{z}' = (a-ib)(a'-ib') = aa'-bb'-ia'b-iab' = aa'-bb-i(ba'+b'a)$ d'où l'égalité.
- Admise.
- Soit $z = a+ib$, alors $\overline{\frac{1}{z}} = \overline{\frac{1}{a+ib}} = \overline{\frac{a-ib}{a^2+b^2}}$ en multipliant par $a-ib$ le dénominateur et le numérateur. Ceci est encore égal à $\frac{a+ib}{a^2+b^2}$.
  Par ailleurs, $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{a^2+b^2}$ en multipliant numérateur et dénominateur par $a+ib$. D'où l'égalité.
- $\overline{\frac{z'}{z}} = \overline{z'\frac{1}{z}} = \bar{z}'\overline{\frac{1}{z}} = \bar{z}'\frac{1}{\bar{z}'} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$.

5 Module et argument d'un nombre complexe

Définition :

Soit $z = ai+b$ avec a et b réels un nombre complexe.

- On appelle *module de z* le nombre noté $|z|$ défini par $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Dans le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$, si M est l'image de z, alors $OM = |z|$.
- Si $z \neq 0$, on appelle *argument de z* toute mesure θ de l'angle $(\vec{OU};\vec{OM})$.



Remarques :

- Si x est un nombre réel, alors le module de x et la valeur absolue de x sont égaux, d'où l'utilisation de la même notation.
- Tout nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments : si θ est un argument de z, alors $\theta + k2\pi$ avec k entier relatif en est un autre.

Propriété :

Soit $z = a + ib$ avec a et b réels, un nombre complexe non nul. Un argument θ de z vérifie :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

et

$$\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemples de savoir faire :

Pour $z = -3 + \sqrt{3}i$,

- **[Calculer le module d'un nombre complexe]** $|z| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3}$.
- **[Trouver un argument d'un nombre complexe]** si θ est un argument de z,
  on a : $\cos(\theta) = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
  et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$
  D'où $\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Propriétés :

Pour tous les nombres complexes z et z' :

- $|\bar{z}| = |z|$ et $|-z| = |z|$
- $|zz'| = |z||z'|$;
- pour tout entier naturel n non nul, $|z^n| = [z|^n$;
- $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$;
- $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Preuve :

- Évident.
- Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' des réels.
  D'une part, on a $zz' = aa' - bb' + i(a'b + ab')$ donc $|zz'|^2 = (aa' - bb')^2 + (a'b + ab')^2$ d'où $|zz'|^2 = a^2a'^2 - 2aa'bb' + b^2b'^2 + a'^2b^2 + 2aa'bb' + a^2b'^2 = a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2$.
  D'autre part, on a $|z|^2 = a^2 + b^2$ et $|z'|^2 = a'^2 + b'^2$ donc $(|z||z'|)^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = aa'^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2 + a^2b'^2$.
  D'où l'égalité $|zz'|^2 = (|z||z'|)^2$ et l'égalité voulue.
- Admise.
- Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' des réels.
  D'une part $\frac{z}{z'} = \frac{a+ib}{a'+ib'} = \frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a'+ib')(a'+ib')} = \frac{aa'+bb'+i(ba'-ab')}{a'^2+b'^2}$ d'où $|\frac{z}{z'}|^2 = (\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2})^2 + (\frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2})^2 = \frac{a^2a'^2+b^2b'^2+b^2a'^2+a^2b'^2}{(a'^2+b'^2)^2} = \frac{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}{(a'^2+b'^2)^2} = \frac{a^2+b^2}{a'^2+b'^2}$.
  D'autre part, $(\frac{|z|}{|z'|})2 = \frac{(a^2+b^2)}{(a'^2+b'^2)}$.
  D'où l'égalité.
- $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

Propriétés :

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, soient A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B. Alors la longueur AB est telle que

$$AB = |z_B - z_A|$$

Preuve :

Soit M tel que $\vec{OM} = \vec{AB}$. M a pour affixe $z_B - z_A$ et $OM = |z| = |z_B - z_A|$.

Exemple de savoir faire :

[Calculer la distance entre deux points d'affixes données] Soient A et B d'affixes respectives $3 + 2i$ et $5 + i$ dans un repère du plan complexe. Alors $\vec{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A = 5 + i - (3 + 2i) = 5 + i - 3 - 2i = 2 - i$ et la longueur AB vaut $AB = \|z_B - z_A\| = \|2 - i\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

6 Forme trigonométrique

Propriété et définition :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. On a :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

avec $r = |z|$ et θ un argument de z.

Cette expression de z est appelée *forme trigonométrique de z*.

Preuve :

$r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \|z\|(\frac{a}{\|z\|} + i\frac{b}{\|z\|}) = a + ib = z$

Exemple de savoir faire :

- **[Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique]**
  On a vu que $z = -3 + i\sqrt{3}$ a pour module $2\sqrt{3}$ et pour argument $\frac{5\pi}{6}$ d'où la forme trigonométrique $z = 2\sqrt{3}(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}))$.
- **[Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique]**
  Si $z = 2\sqrt{3}(\cos(\frac{5\pi}{6} + i\sin(\frac{5\pi}{6})$ alors $z = 2\sqrt{3}(\cos(\pi - \frac{\pi}{6}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{6})) = 2\sqrt{3}(-\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})) = 2\sqrt{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \frac{-2\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} + i\frac{2\sqrt{3}}{2} = -3 + i\sqrt{3}$.