Vecteurs de l'espace, cours, première STD 2A

F.Gaudon

15 avril 2011

Table des matières

1 Vecteurs et translation de l'espace

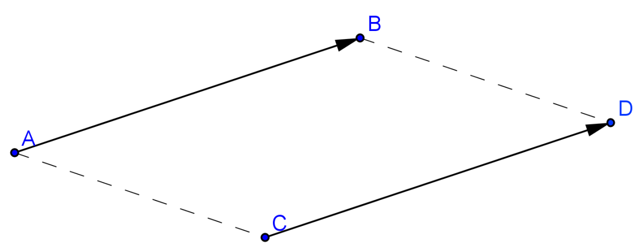
Définition :

Soient A et B deux points de l'espace. On appelle translation de vecteurs $\vec{AB}$ l'application qui à tout point M de l'espace associe le point M' tel que les segments $[AM']$ et $[BM]$ ont le même milieu. On dit alors que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{MM'}$ sont égaux et on note $\vec{AB} = \vec{MM'}$. M' est appelé l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Propriété :

A, B, M et M' quatre points de l'espace. $\vec{AB} = \vec{MM'}$ si et seulement si $ABMM'$ est un parallélogramme.

Remarque :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si ils ont même direction, même sens et même longueur.



Définition :

On appelle *norme* d'un vecteur $\vec{u}$ et on note $\|\vec{u}\|$ sa longueur. C'est à dire, si A et B sont deux points tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ alors $\|\vec{u}\| = AB$.

Propriété :

Pour tout point A de l'espace et pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point B tel que $\vec{AB} = \vec{u}$.

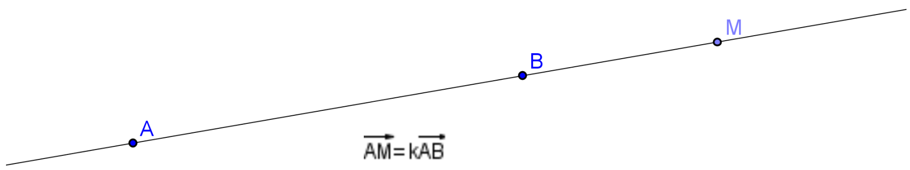
Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont dits colinéaires si il existe un réel k non nul tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Propriété :

Soient A, B, C et D quatre points distincts de l'espace.

- A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.



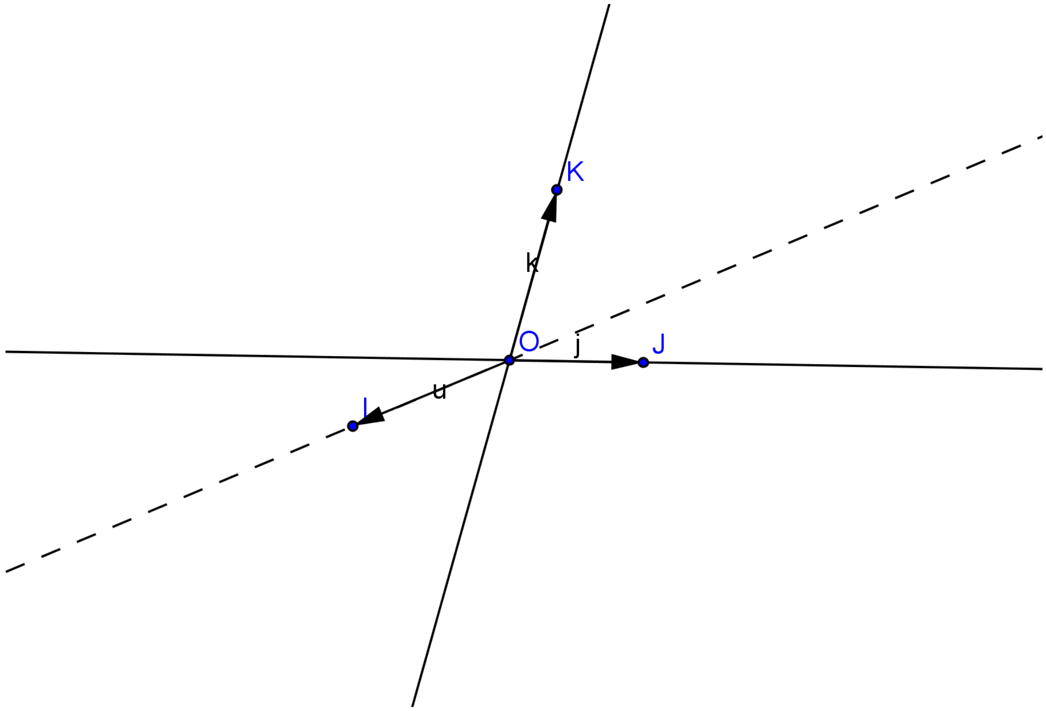
2 Repérage dans l'espace

Définition :

Un repère de l'espace est la donnée d'un point origine O et de trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ non coplanaires. On note alors $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ce repère.

Propriété et définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ appelé coordonnées du point M de réels tels que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
x est *l'abscisse*, y est *l'ordonnée* et z est la *cote* du point M dans ce repère.



Propriété :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère de l'espace, $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points. Aors :

- Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$;
- le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2})$;

Propriété :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace (c'est à dire que les axes sont deux à deux perpendiculaires et les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ont une norme égale à 1).

- Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a;b;c)$ a pour norme $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$;
- Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points. La distance AB de A à B est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$$

3 Propriétés des translations

Propriété :

Si M' et N' sont les images respectives de M et N par une translation, alors $\vec{M'N'} = \vec{MN}$.

Preuve :
On a en effet $\vec{MM'} = \vec{u}$ et $\vec{NN'} = \vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur définissant la translation donc $\vec{M'N'} = \vec{M'M} + \vec{MN} + \vec{NN'} = -\vec{u} + \vec{MN} + \vec{u} = \vec{MN}$.

Propriété :

Les translations conservent :
- l'alignement ;
- les milieux de segments ;

Preuve :
- Si M, N et P sont trois points alignés d'images respectives M', N' et P', les vecteurs $\vec{MN}$ et $\vec{MP}$ sont colinéaires donc il existe un réel a tel que $\vec{MP} = a\vec{MN}$. D'après ce qui précède, on a $\vec{M'P'} = \vec{MP}$ et $\vec{M'N'} = \vec{MN}$. On a donc $\vec{M'P'} = a\vec{M'N'}$ ce qui montre que M', N' et P' sont alignés.
- Même raisonnement.

Propriétés :

- L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.
- L'image d'un segment $[AB]$ par une translation est un segment d'extrémités les images de A et B ;

Preuve :
Si M et N sont deux points et M' et N' sont leurs images respectives, on a vu que $\vec{M'N'} = \vec{MN}$. Cela signifie donc $\vec{MN}$ et $\vec{M'N'}$ sont colinéaires et donc que les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.

Propriété :

Une translation conserve les longueurs, les aires et les volumes.

Preuve :
Montrons ce qui concerne les longueurs. On a vu que si M' et N' sont les images de M et N par une translation, on a $\vec{M'N'} = \vec{MN}$ donc en passant aux longueurs, on a $M'N' = MN$.

Propriété :

L'image d'un cercle de centre I et de rayon R où R est un réel positif par une translation est un cercle de centre l'image de I et de rayon R.