Rotations et composées de transformations, cours, première STD2A

F.Gaudon

21 avril 2011

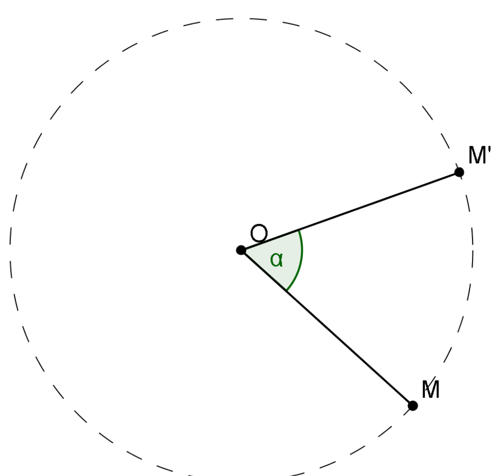
1 Rotation

Définition :

Soit O un point et α un réel. La rotation de centre O et d'angle α degré dans le sens direct est la transformation du plan telle que l'image de O est O et pour tout point M distinct de O, l'image M' de M vérifie :
- $OM = OM'$
- $\widehat{MOM'} = \alpha$
- est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Propriété :

Dans une rotation d'angle non nul, l'unique point invariant est le centre de la rotation.



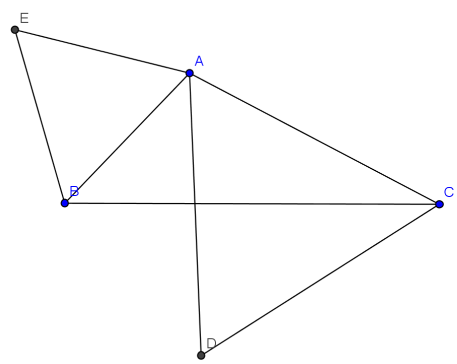
Propriété :

Les rotations conservent :
- les distances ;
- les angles ;
- les milieux ;
- le parallélisme ;
- l'alignement ;
- les aires.

Propriété (images de droites) :

L'image d'une droite par une rotation d'angle α degrés est une droite qui forme un angle de α radians.

Exemple :
Soit ABC un triangle quelconque sur lequel on construit deux triangles équilatéraux ABE et ACD disposés comme sur la figure suivante :



Montrons que $[ED]$ et $[BC]$ ont la même longueur et que les droites (ED) et (BC) forment un angle de $\frac{\pi}{3}$.

Soit r la rotation de centre A d'angle 60 $^{\circ}$ dans le sens indirect. ACD est un triangle équilatéral donc $AC = AD$ et l'angle $\widehat{CAD}$ mesure $\frac{\pi}{3}$ .L'image de C par la rotation r est donc D. De même, AEB est un triangle équilatéral donc $AE = AB$ et l'angle $\widehat{EAB}$ mesure $\frac{\pi}{3}$ d'où l'image de B par r est E. La rotation conserve les longueurs donc $[BC]$ et son image $[ED]$ ont même longueur. En outre, la rotation r transforme la droite (BC) en la droite (ED) et les deux droites forment un angle de 60 $^{\circ}$ entre elles.

2 Composées de transformations

Propriété :

Soient t_1 et t_2 deux translations de vecteurs respecitfs u_1 et u_2. Alors, la composée des deux translations t_1 et t_2 est une translation de vecteur $u_1 + u_2$.

Preuve :

Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u_1} = \vec{AB}$ et $\vec{u_2} = \vec{BC}$. Pour tout point M, soit M' l'image de M par la translation t_1 et M'' l'image de M' par la translation de vecteur t_2.
On a $\vec{MM'} = \vec{AB}$ et $\vec{BC} = \vec{M'M''}$. On sait que $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. $\vec{MM''} = \vec{MM'} + \vec{M'M''} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ donc M'' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{AC} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$.

Propriété :

Soient s_1 et s_2 deux symétries d'axes (d) et (d').

- Si (d_1) est parallèle à (d_2) alors la composée de s_1 et de s_2 est la translation de vecteur $\vec{H_1H_2}$ où H_1 et H_2 sont deux points tels que H_1 appartient à (d_1) et H_2 appartient à (d_2) avec (H_1H_2) perpendiculaire aux deux axes.
- Si (d_1) et (d_2) sont sécantes en un point I, alors la composée de s_1 et de s_2 est la rotation de centre I et d'angle égal deux fois l'angle entre (d_1) et (d_2)