Produit scalaire, cours, première STD2A

F.Gaudon

17 avril 2011

Table des matières

Ce cours a été écrit d'après une recherche faite par le réseau "Ampères" de l'INRP/ADIREM initiée par la commission inter-IREM de Didactique. Il repose sur des travaux effectués par l'IREM de Clermont Ferrand par F. Barachet, G. Le Quang et R. Noirfalise publiés dans le bulletin n°485 des mois de novembre-décembre 2009 de l'APMEP.

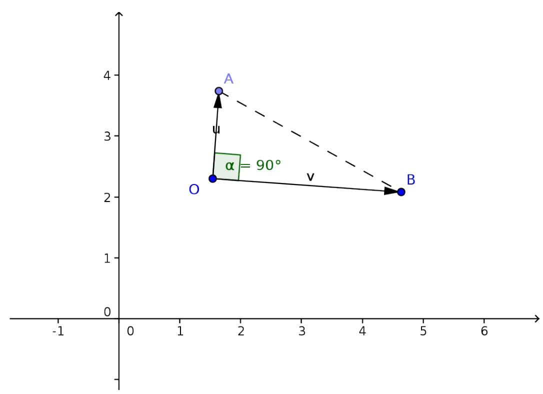
1 Orthogonalité de vecteurs

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* si l'un des deux vecteurs est nul ou si leurs directions sont perpendiculaires.

Propriété :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé. On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans ce repère. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.



Preuve :
Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, le cas où l'un des deux vecteurs est nul étant évident. Soient A et B deux points tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$. Les deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si le triangle OAB est rectangle en O c'est à dire $OA^2 + OB^2 = AB^2$ d'après le théorème de Pythagore ce qui s'écrit encore $x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$ soit $x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2$ d'où $2xx' + 2yy' = 0$ ou encore $xx' + yy' = 0$.

2 Défaut d'orthogonalité et produit scalaire

Propriété et définition :

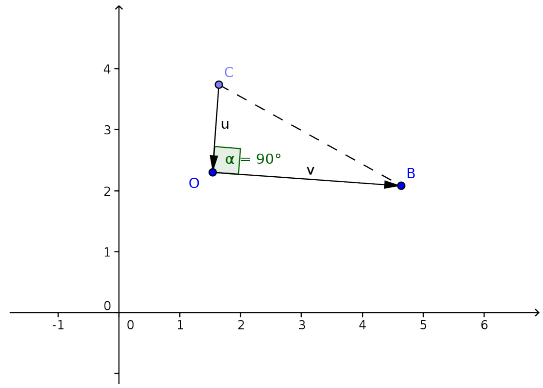
On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$ et $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ dans un autre repère orthonormé $\mathcal{R}'$. Alors :

- $xx' + yy' = XX' + YY' = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$;
- on appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$ le nombre indépendant du repère orthonormé considéré :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Preuve :

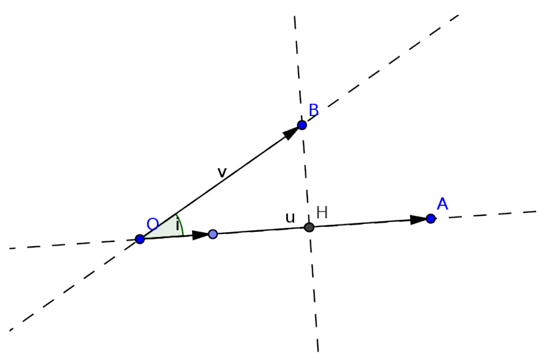
De même que précédemment, on peut supposer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. Soient C et B deux points tels que $\vec{CO} = \vec{u}$ et $\vec{OB} = \vec{v}$. On a donc $\vec{u} + \vec{v} = \vec{CB}$ d'où $\frac{1}{2} = (\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(CB^2 - OC^2 - OB^2)$. Dans le repère $\mathcal{R}$ ceci est égal à $\frac{1}{2}((x-x')^2 + (y-y')^2 - (x^2+y^2) - (x'^2+y'^2)) = 2xx' + 2yy'$ et dans le repère $\mathcal{R}'$ c'est égal à $2XX' + 2YY'$ d'où le résultat et la formule annoncée.



3 Propriétés du produit scalaire

Propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et O, A et B des points tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{OB} = \vec{v}$. On note θ une mesure de $\widehat{AOB}$.
Alors
$$\vec{u}.\vec{v} = OA \times OB \times \cos(\theta) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta)$$



Propriété :

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tous les nombres réels k, on a :
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$;
- $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$

Preuve :

Dans un repère orthonormé, $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}$, $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$.
Donc $\vec{v}+\vec{w}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x'+x'' \\ y'+y'' \end{pmatrix}$ et $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})$ $\begin{pmatrix} x(x'+x'') \\ y(y'+y'') \end{pmatrix}$.
Par ailleurs, $\vec{u}.\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} xx' \\ yy' \end{pmatrix}$, $\vec{u}.\vec{w}$ $\begin{pmatrix} xx'' \\ yy'' \end{pmatrix}$ donc $\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ $\begin{pmatrix} xx'+xx'' \\ yy'+yy'' \end{pmatrix}$ ce qui assure la première égalité.
On montre de même la deuxième égalité.

Propriété et définition :

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même $\vec{u}.\vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ et on a $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
En outre, si O et A sont deux points tels que $\vec{OA} = \vec{u}$, on a $\vec{OA}^2 = \|\vec{OA}\|^2 = OA^2$.

Preuve :

$\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{OA}\|^2 = OA^2$