Perspective parallèle, cours, première STD2A

F.Gaudon

19 avril 2011

Table des matières

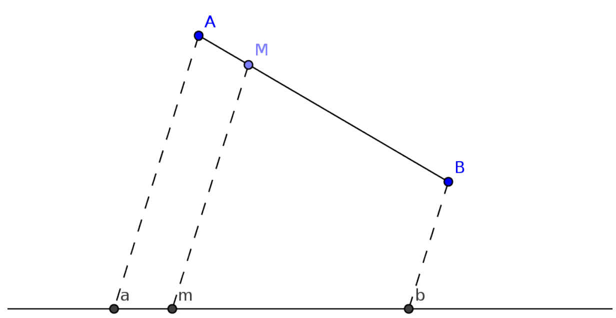
1 Ombre au soleil

Modélisation :
On observe l'ombre au soleil d'un cube. Afin d'étudier le phénomène de l'ombre, nous ferons les hypothèses de modélisation suivantes :

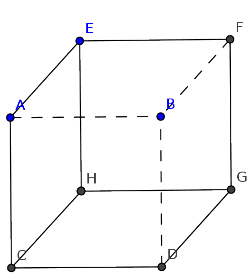
- le soleil est assimilé à une source ponctuelle. Cette hypothèse est justifiée par le fait que le Soleil est perçu comme un point à partir de la Terre compte tenu du fait que le diamètre du Soleil est négligeable par rapport à la distance Terre/Soleil ;
- la lumière se propage en ligne droite et les rayons lumineux tombant sur un objet sont parallèles. En réalité, les rayons lumineux provenant d'un point divergent mais ici encore, la distance entre deux objets terrestres est négligeable par rapport à la distance Terre/Soleil.

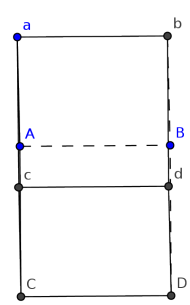
Observations :

- L'ombre d'un segment est un segment ;
- Les proportions sont conservées sur l'ombre d'un segment. En particulier, les milieux sont conservés.
- L'ombre d'un segment horizontal est un segment qui lui est parallèle et de même longueur.
- Les ombres de d'un segment sur deux plans horizontaux sont deux segments parallèles et de même longueur.



Application au dessin de l'ombre d'un cube sur le plan où il est posé :
La face inférieure A'B'C'D' coïncide avec son ombre a'b'c'd' et l'image de la face supérieure du cube est un carré translaté de la face inférieure.





2 Perspective parallèle

Définition :

Soient un plan $\mathcal{P}$ et une droite (d) non parallèle à $\mathcal{P}$. Á tout point M de l'espace, on fait correspondre le point m intersection du plan $\mathcal{P}$ avec la droite parallèle à (d) passant par M. Cette transformation est appelée *perspective parallèle* sur le plan $\mathcal{P}$ parallèlement à la droite (d). Le plan $\mathcal{P}$ est le plan de projection de la perspective et la direction (d) est sa direction.

Remarque :
Si le plan $\mathcal{P}$ est horizontal, cette transformation modélise l'ombre au soleil sur le sol.

Propriétés :

Les propriétés suivantes correspondent aux propriétés déjà observées lors de la modélisation de l'ombre au soleil.

- L'image d'un segment est un segment.
- Tout objet situé dans un plan parallèle à $\mathcal{P}$ a une image en vraie grandeur : les angles et les distances sont conservées et tout segment parallèle à $\mathcal{P}$ a pour image un segment parallèle.
- La perspective parallèle conserve les milieux et les rapports de longueur sur une même droite.

Conséquences :

- L'image d'un parallélogramme est un parallélogramme.
- La perspective parallèle conserve le parallélisme.

Propriété et définition :

À chaque direction correspond un *rapport de réduction* : soit un segment $[MN]$ d'image $[mn]$. Posons $\frac{mn}{MN} = k$ Alors pour tout segment $[PQ]$ parallèle à $[MN]$ et d'image $[mn]$ on a $mn = kPQ$.

Remarque :
Le rapport de réduction peut être supérieur à 1 contrairement à ce que son nom laisse entendre.

Remarques :

- Certaines propriétés ne sont pas conservées : les angles (et donc la perpendicularité), les rapports de longueur sur des segments de directions différentes.
- Une perspective parallèle est entièrement déterminée par la perspective d'un cube, c'est à dire que, l'image d'un cube étant donnée, l'image de tout objet de l'espace s'en déduit par des constructions géométriques.

Définition :

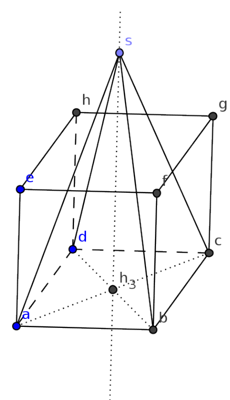
> La *Perspective cavalière* est une perspective parallèle dans laquelle le plan de projection est un plan frontal.

Exemple d'application au dessin en perspective :

Soit une pyramide régulière $SABCD$ de sommet S et de base un carré $ABCD$ de côté a. Soit H le centre de la base. On pose $SH = l$. On cherche sa représentation en perspective cavalière.

Soit $ABCDEFGH$ le cube de base inférieure $ABCD$ et tel que $ABFE$ soit la face frontale et soit $abcdefgh$ son image en perspective cavalière. h est alors, par conservation des milieux, le centre du parallélogramme $abcd$. SH étant parallèle à AE, son image (hs) est parallèle à (ae).

En outre (hs) est parallèle au plan frontal donc est représentée en vraie grandeur. On en déduit que $hs = l$ ce qui permet de placer le point s et d'en déduire les arêtes manquantes.

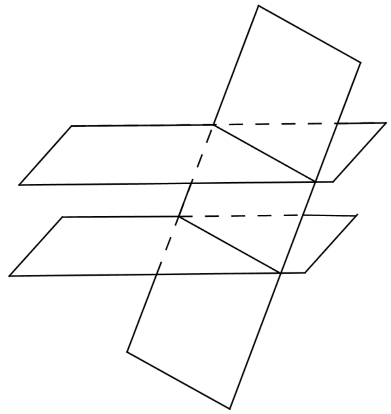


3 Application à la représentation de sections de solides par un plan

3.1 Compléments sur les droites et plans de l'espace

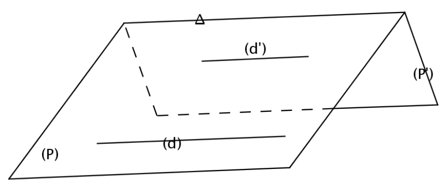
Propriétés :

> - Si deux points d'une droite appartiennent à un plan, alors la droite est contenue dans le plan.
> - Trois points A, B et C non alignés déterminent un unique plan noté (ABC).
> - L'intersection de deux plans non parallèles est une droite.
> - Les théorème de géométrie planes s'appliquent dans tout plan de l'espace.
> - Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.



Théorème du toit :

Si trois plans sont sécants deux à deux, alors les trois droites d'intersection sont concourantes ou parallèles.

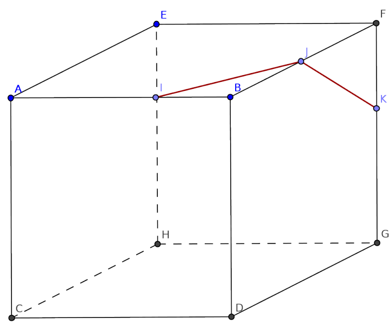


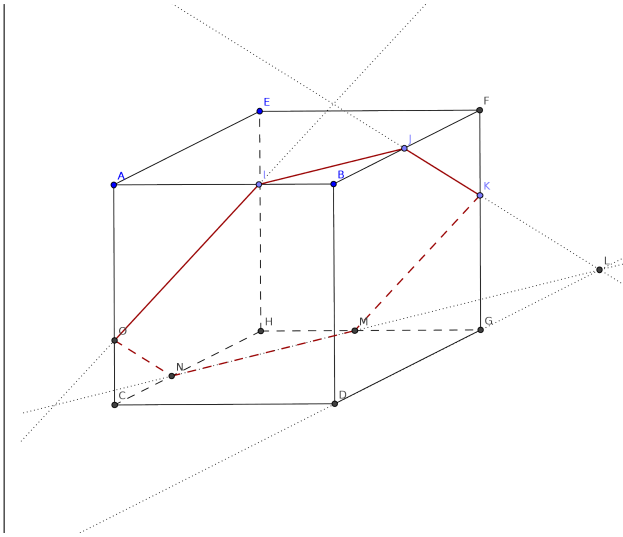
3.2 Exemple de section de solides par un plan

Exemple :

On cherche à représenter la section du cube ABDCEFGH par le plan (IJK).

- (JK) et (DG) sont coplanaires car incluse dans (BDG) et sont sécantes dans ce plan en L.
- (IJK) coupe (ABF) selon (IJ) et (CDG) est parallèle à (ABF). Donc (IJK) coupe (CDG) selon une droite parallèle à (IJ). En outre, L appartient à (CDG) et à (IJK) donc l'intersection de (IJK) avec (CDG) est la droite parallèle à (IJ) passant par L.
- Cette droite coupe la face $CDGH$ selon le segment $[MN]$.
- $[MK]$ est l'intersection de (IJK) avec la face $GFEH$.
- (IJK) coupe (EFG) selon $[MK]$ et (ABD) est parallèle à (EFG) donc (IJK) coupe (EFG) selon une droite parallèle à (MK). Comme I appartient déjà à l'intersection, (IJK) coupe donc $ABDC$ selon la droite parallèle à (MK) passant par I.
- Cette droite coupe $[AC]$ en O. L'intersection avec $ACEH$ est alors $[ON]$





4 Application à la représentation d'ombres au soleil

Exemple :
Avec l'étude faite sur la perspective parallèle, on représente maintenant en perspective parallèle l'ombre au soleil d'une fenêtre sur un mur d'une pièce. La fenêtre considérée est un rectangle $EFGH$ et est donc représentée par un parallélogramme $efgh$. $[gg']$ est l'image d'un rayon solaire qui passe par G.On cherche à dessiner l'ombre $e'f'g'h'$ de la fenêtre sur le mur.

- Les parallèles (gh) et (ef) coupent (AD) en I et K respectivement.e,f,e' et f' sont coplanaires et K appartient à ce plan. De même h, g, h' et g' sont coplanaires et I appartient à ce plan.
- (ef) et (hg) étant parallèles à (AB), $(g'h')$ et $(e'f')$ sont parallèles à (AC).
- Les rayons (gg'), (hh'), (ee') et (ff') sont parallèles