Nombre dérivé, cours, première STD2A

F.Gaudon

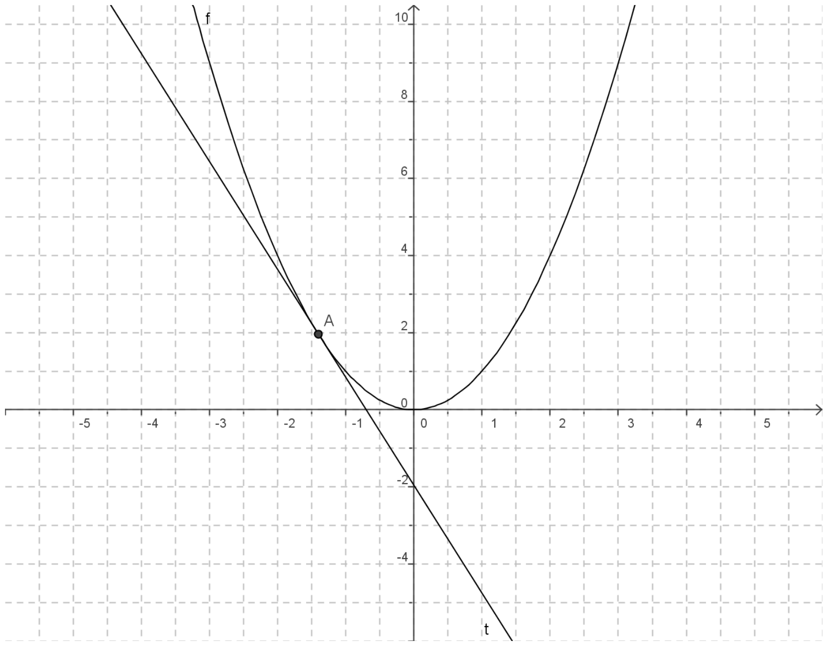
17 avril 2011

Table des matières

1 Tangente à une courbe

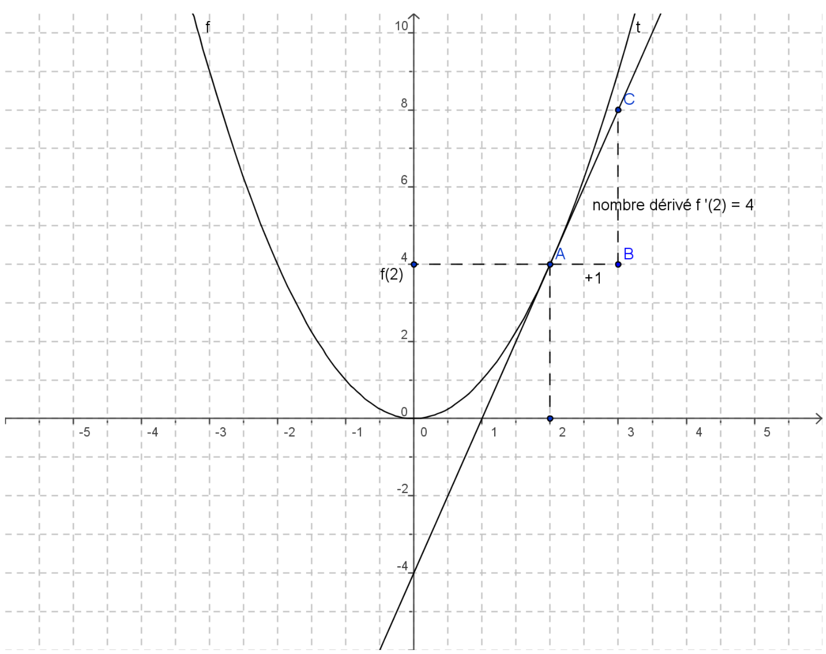
Définition :

On appelle *tangente* à une courbe en un point A de cette courbe, la droite « position limite » obtenue lorsque, en considérant la sécante à la courbe aux points d'abscisses a et $a+h$, le réel h tend vers 0.



Définition :

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ et soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_A. Si la courbe admet au point d'abscisse x_A une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées, alors le coefficient directeur de cette tangente est appelé *nombre dérivé* de f en x_A et noté $f'(x_A)$ (lire "f prime de x indice A").



Propriété :

> La tangente en un point A d'abscisse x_A à la courbe représentative de la fonction f a pour équation équation réduite $y = f'(x_A)x + p$ où $f'(x_A)$ est le nombre dérivé de f en x_A et $p = y_A - m \times x_A$ avec $m = f'(x_A)$ et $y_A = f(x_A)$.

Exemple :
Soit f définie par $f(x) = x^2$ pour tout x réel. On admet que $f'(2) = 4$ (voir figure ci-dessus pour une visualisation et voir le paragraphe suivant pour une justification). La tangente au point d'abscisse 2 a donc pour équation $y = 4x + p$ où p est un réel. Or $f(2) = 4$ donc le point A de coordonnées $(2; 4)$ appartient à la tangente et on a $p = 4 - 4 \times 2$ donc $p = -4$. La tangente au point d'abscisse 2 a donc pour équation $y = 2x - 4$.

2 Nombres dérivés de fonctions usuelles

2.1 Nombres dérivés pour les fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
k constant	0
x	1
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemple :
Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$. On a donc $f'(x) = 2x$ et en particulier $f'(2) = 2 \times 2 = 4$ ce qui justifie le tracé de la tangente du paragraphe précédent.

2.2 Opérations sur les nombres dérivés

2.2.1 Somme

Propriété :

> Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I et admettant un nombre dérivé en x_A, alors $u + v$ est définie sur I et admet un nombre dérivé en x_A tel que :
>
> $$(u + v)'(x_A) = u'(x_A) + v'(x_A)$$

Exemple :
Soit u la fonction définie sur $\mathcal{R} - \{0\}$ par $u(x) = x^3 + \frac{1}{x}$. Alors u admet en tout réel non nul x_A un nombre dérivé $u'(x_A)$ et on a $u'(x_A) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$.

2.2.2 Multiplication par un nombre réel k

Propriété :

Soient u une fonction définie un intervalle I et admettant un nombre dérivé en x_A. Soit k un nombre réel, alors : ku est définie sur I, admet un nombre dérivé en x_A et :

$$(ku)'(x_A) = ku'(x_A)$$

Exemple :
Soit u la fonction définie sur $\mathcal{R}$ par $u(x) = 4x^2$. Alors la fonction u admet en tout réel x_A un nombre dérivé $u'(x_A)$ et on a $u'(x_A) = 4 \times 2x = 8x$.