Fonctions de référence, cours, première STD2A

F.Gaudon

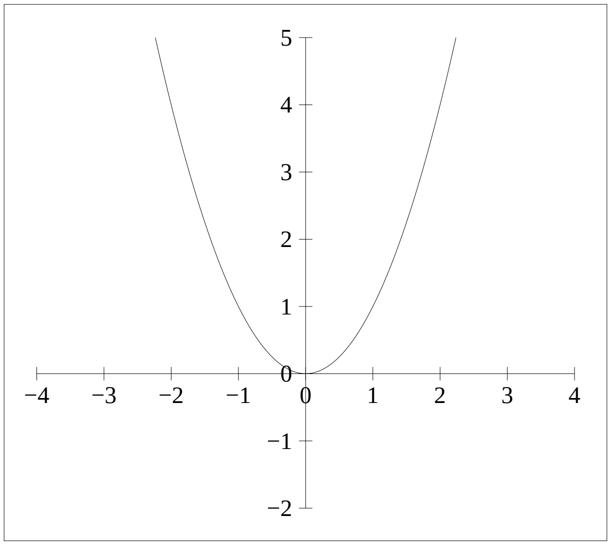
15 avril 2011

Table des matières

1 Fonctions de référence

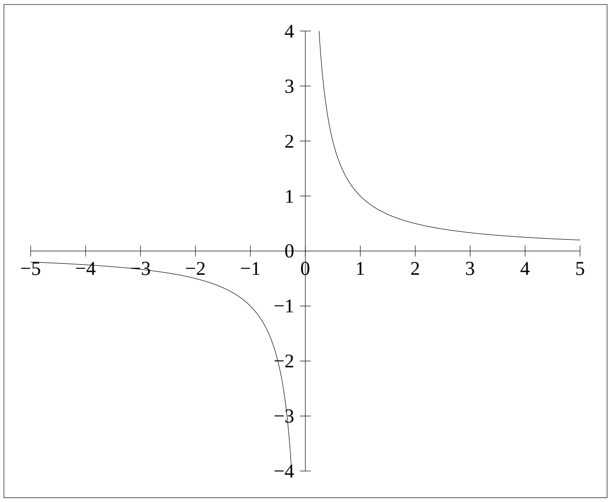
1.1 Fonction carré

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$;
- définie pour tout x réel par $x \longmapsto x^2$;
- strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$;
- positive sur $]-\infty; +\infty[$;
- représentée graphiquement par une *parabole*.



1.2 Fonction inverse

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$;
- définie pour tout $x \neq 0$ par $x \longmapsto \frac{1}{x}$;
- strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$;
- strictement négative sur $]-\infty; 0[$ et strictement positive sur $]0; +\infty[$;
- représentée graphiquement par une *hyperbole* ;



1.3 Fonctions affines

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$;
- définie pour tout x réel par $x \longmapsto ax+b$ où a et b sont deux réels fixés ;
- strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a>0$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a<0$;
- signe : si $a \neq 0$, deux cas possibles :

si $a>0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		-	0	$+$	

si $a<0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		$+$	0	-	

- Représentée graphiquement par une droite.

1.4 Fonction racine carrée

Définition :

On appelle fonction *racine carrée* la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $x \mapsto \sqrt{x}$.

Variations :

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	

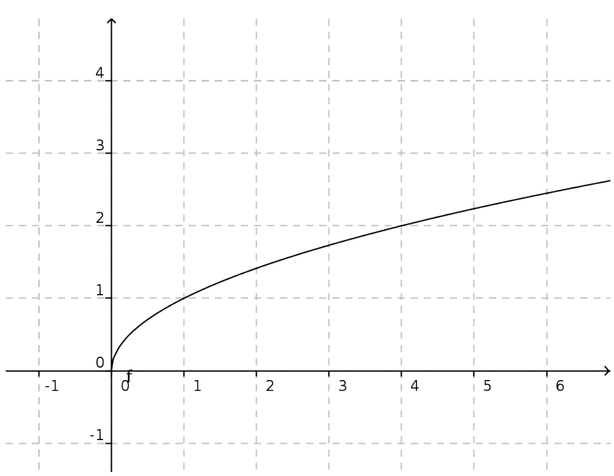
Preuve :

Soient x_1 et x_2 deux réels positifs tels que $x_1 < x_2$. Alors $x_2 - x_1 > 0$.
Or, $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$. Comme $\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1} > 0$ et $x_2 - x_1 > 0$ on a donc $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} > 0$ c'est à dire $x_2 > x_1$ ce qui signifie que la fonction racine carrée est une fonction strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Signe :

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+$	

Représentation graphique :



2 Comparaison de fonctions de référence

Propriété :

Pour tout réel $x \in [0;1]$, $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$.

Preuve :

Pour tout réel $x \in [0;1]$, $x^2 - x = x(x-1)$. Or $x \geq 0$ et$x - 1 \leq 0$ donc $x^2 - x \leq 0$ c'est à dire $x^2 \leq x$. En outre, de $0 \leq x^2 \leq x$, on déduit, en appliquant la fonction racine carrée qui est croissante sur $[0;1]$, que $x \leq \sqrt{x}$.