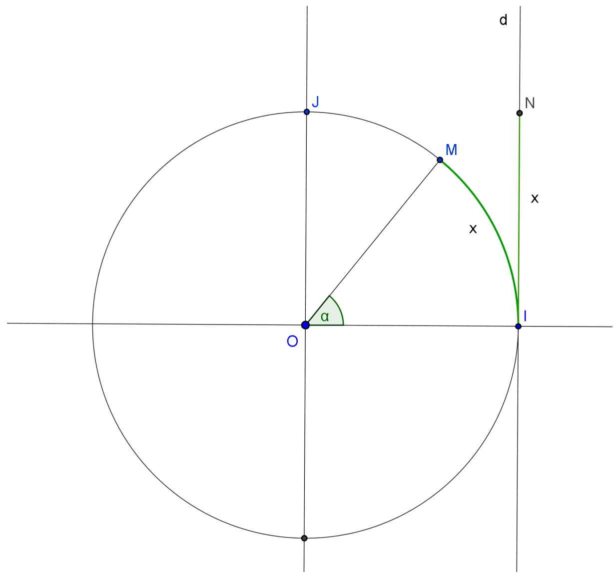
Angles orientés, cours, première S

1 Cercle trigonométrique et radian



Définition :
Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormal du plan. On appelle *cercle trigonométrique* tout cercle dont le rayon .... et de centre ....

Définition :
Dans un repère orthonormal $(O;\vec{OI};\vec{OJ})$, on considère le cercle trigonométrique de centre O et la droite $\mathcal{D}$ tangente en I à la droite (OI). On considère sur cette droite un repère $(I;\vec{IK})$ tel que $IK = 1$.
Á tout nombre réel x on fait correspondre le point N d'abscisse x dans le repère $(I;\vec{IK})$ de $\mathcal{D}$. Par enroulement de la droite $\mathcal{D}$ autour du cercle $\mathcal{C}$, on obtient un point M unique du cercle trigonométrique tel que la distance à zéro de x soit égale à la longueur de l'arc IM.
On appelle .... de l'angle $\widehat{IOM}$ la distance à zéro du nombre x précédent.

Propriété :
La mesure d'un angle en radian est .... à la mesure du même angle en degrés.

Remarques :

- Un radian correspond à la mesure de l'angle au centre d'un cercle trigonométrique intercepté par .... ;
- Un angle plat mesure 180 en degrés ou .... en radians.

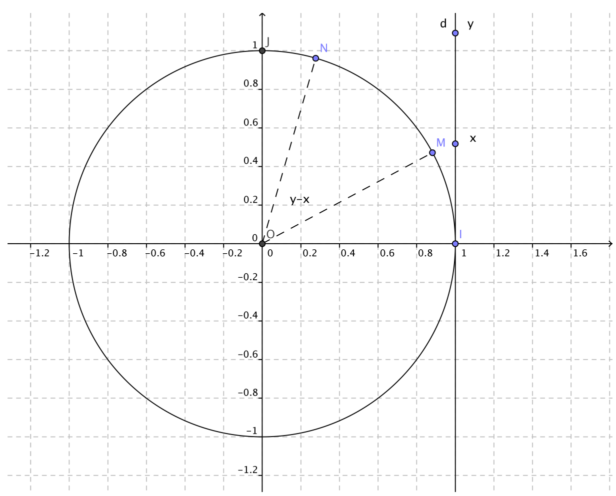
Exemple :
[Convertir des radians en degré et réciproquement]

- $\frac{\pi}{3}$rad = ... ;
- 3rad = ... ;
- 135° = ...

2 Angles orientés

Définition :
Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Sur le *cercle trigonométrique* (cercle de centre O et de rayon 1), deux sens de parcours sont possibles, l'un est dit direct, l'autre indirect. Par convention on choisit .... Un sens étant choisi, le plan est alors dit ....

Définition :
M et N sont les points images des réels x et y sur le cercle trigonométrique de centre O. Les mesures en radians de *l'angle orienté* noté $(\vec{OM};\vec{ON})$ sont les réels .... où .... On note plus simplement par abus de notation $(\vec{OM};\vec{ON}) = y - x$.

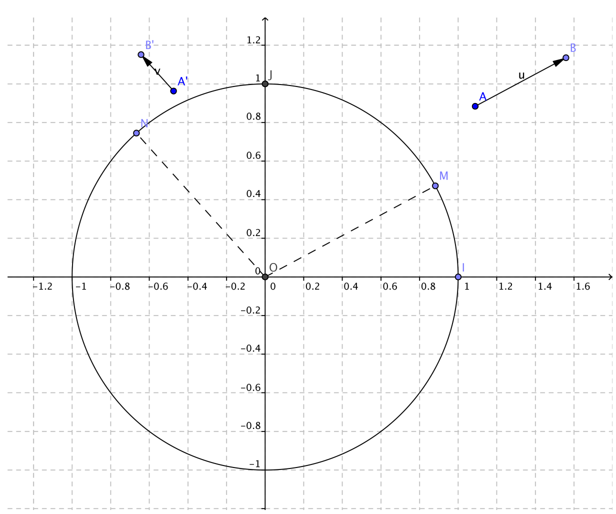


Propriété et définition :
M et N sont deux points du cercle trigonométrique de centre O. L'angle orienté $(\vec{OM};\vec{ON})$ possède une mesure et une seule a dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$. Cette mesure est appelée *mesure principale* de l'angle orienté $(\vec{OM};\vec{ON})$. L'angle non orienté (encore appelé *géométrique* $\widehat{MON}$ est égale à .... radians.

Preuve :
Toute mesure en radians d'un angle orienté est de la forme .... où .... On cherche les entiers k tels que $-\pi < \alpha+2k\pi \leq \pi$. Cela équivaut à $-\pi-\alpha < 2k\pi \leq \pi-\alpha$ ou encore à $-\frac{pi+\alpha}{2\pi} < k \leq \frac{\pi-\alpha}{2\pi}$ c'est à dire $-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2\pi} < k \leq \frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2\pi}$. L'encadrement étant d'amplitude 1, il existe un unique entier k qui y appartient ce qui signifie que l'angle orienté admet une et une seule mesure entre $-\pi$ et π.

Exemple :
[Déterminer la mesure principale d'un angle orienté]
On considère un angle orienté de mesure $\frac{-25\pi}{6}$.
On a $\frac{-25\pi}{6}+2\pi = ...$
Mais ......
$\frac{-25\pi}{6}+2\times 2\pi = ...$
Donc ...... est la mesure principale.

Définition :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Soient M et N les points du cercle trigonométrique tels que $\vec{OM}$ est colinéaire de même sens à $\vec{u}$ et $\vec{ON}$ est colinéaire de même sens à $\vec{v}$.
On appelle mesure de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$ toute mesure en radian de l'angle ....



3 Propriétés des mesures d'angles orientés

Propriété (relation de Chasles) :
Pour tous les vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$,

....

Preuve :
Admise

Propriété :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si ....
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire si et seulement si ....

Preuve :
Conséquence directe de la définition des angles orientés.

Conséquences de la relation de Chasles :
Pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls,

- $(\vec{v};\vec{u}) =$........... ;
- $(\vec{u};-\vec{v}) =$.............. ;
- $(-\vec{u};\vec{v}) =$.............. ;
- $(-\vec{u};-\vec{v}) =$.............. .

Preuve :

- On a $(\vec{u};\vec{u}) = 0$ et d'après la relation de Chasles $(\vec{u};\vec{u}) = (\vec{u};\vec{v}) + (\vec{v};\vec{u})$ donc $(\vec{u};\vec{v}) =$................ ;
- $(\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + (\vec{v};-\vec{v}) =$.................. ;
- de même que précédemment ;
- $(-\vec{u};-\vec{v}) = (-\vec{u};\vec{u}) + (\vec{u};\vec{v}) + (\vec{v};-\vec{v}) = \pi + (\vec{u};\vec{v}) + \pi =$.................... .

Exemple :
[Calculer en utilisant les propriétés des angles orientés]

On considère trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $(\vec{v};\vec{u}) = -\frac{2\pi}{3}$ et $(\vec{v};\vec{w}) = \frac{\pi}{6}$.

On cherche à calculer une mesure de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{w})$.

On a $(\vec{u};\vec{v}) =$ .....

D'où $(\vec{u};\vec{w}) =$ ......