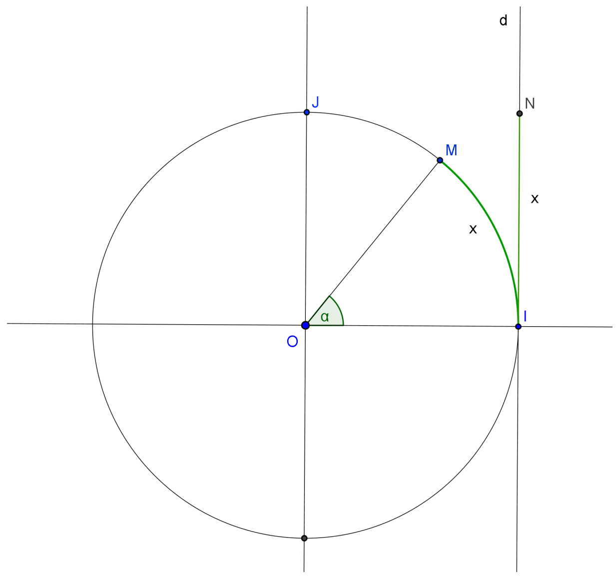
Angles orientés, cours, première S

F.Gaudon

14 février 2016

Table des matières

1 Cercle trigonométrique et radian



Définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormal du plan. On appelle *cercle trigonométrique* tout cercle dont le rayon est égal à l'unité de longueur et de centre l'origine O du repère.

Définition :

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{OI};\vec{OJ})$, on considère le cercle trigonométrique de centre O et la droite $\mathcal{D}$ tangente en I à la droite (OI). On considère sur cette droite un repère $(I;\vec{IK})$ tel que $IK = 1$.

Á tout nombre réel x on fait correspondre le point N d'abscisse x dans le repère $(I;\vec{IK})$ de $\mathcal{D}$. Par enroulement de la droite $\mathcal{D}$ autour du cercle $\mathcal{C}$, on obtient un point M unique du cercle trigonométrique tel que la distance à zéro de x soit égale à la longueur de l'arc IM.

On appelle mesure en *radian* de l'angle $\widehat{IOM}$ la distance à zéro du nombre x précédent.

Propriété :

La mesure d'un angle en radian est *proportionnelle* à la mesure du même angle en degrés.

Remarques :

- Un radian correspond à la mesure de l'angle au centre d'un cercle trigonométrique intercepté par un arc de longueur d'une unité de longueur ;
- Un angle plat mesure 180 en degrés ou π en radians.

Exemple :

[Convertir des radians en degré et réciproquement]

- $\frac{\pi}{3}\text{rad} = 60°$;
- $3\text{rad} = \frac{3}{\pi} \times 180° \approx 171°$;
- $135° = \frac{135}{180}\pi\text{rad} = \frac{27}{36}\pi\text{rad} = \frac{3\pi}{4}\text{rad}$.

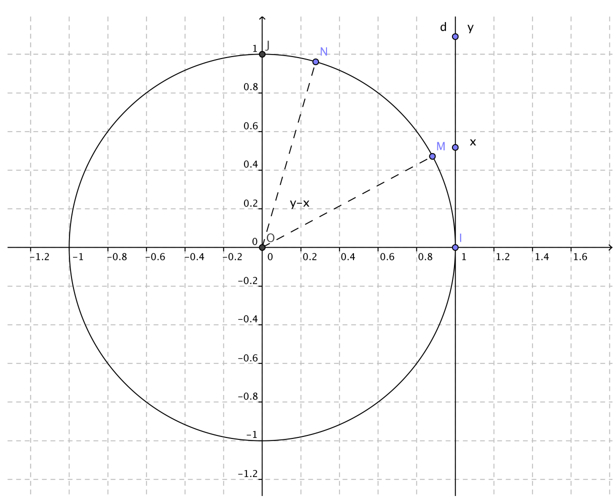
2 Angles orientés

Définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Sur le *cercle trigonométrique* (cercle de centre O et de rayon 1), deux sens de parcours sont possibles, l'un est dit direct, l'autre indirect. Un sens de parcours direct (par convention on prend le sens inverse des aiguilles d'une montre) étant choisi, le plan est alors dit *orienté*.

Définition :

M et N sont les points images des réels x et y sur le cercle trigonométrique de centre O. Les mesures en radians de *l'angle orienté* noté $(\vec{OM};\vec{ON})$ sont les réels $y - x + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. On note plus simplement par abus de notation $(\vec{OM};\vec{ON}) = y - x$.

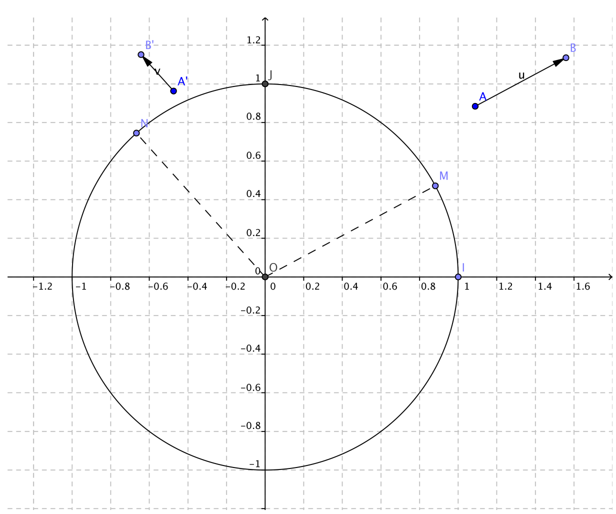


Propriété et définition :
M et N sont deux points du cercle trigonométrique de centre O. L'angle orienté $(\vec{OM};\vec{ON})$ possède une mesure et une seule a dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$. Cette mesure est appelée *mesure principale* de l'angle orienté $(\vec{OM};\vec{ON})$. L'angle non orienté (encore appelé *géométrique* $\widehat{MON}$ est égale à $|a|$ radians.

Preuve :
Toute mesure en radians d'un angle orienté est de la forme $x+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$. On cherche les entiers k tels que $-\pi<\alpha+2k\pi\leq\pi$. Cela équivaut à $-\pi-\alpha<2k\pi\leq\pi-\alpha$ ou encore à $-\frac{pi+\alpha}{2\pi}<k\leq\frac{\pi-\alpha}{2\pi}$ c'est à dire $-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2\pi}<k\leq\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2\pi}$. L'encadrement étant d'amplitude 1, il existe un uique entier k qui y appartient ce qui signifie que l'angle orienté admet une et une seule mesure entre $-\pi$ et π.

Exemple :
[Déterminer la mesure principale d'un angle orienté]
On considère un angle orienté de mesure $\frac{-25\pi}{6}$.
On a $\frac{-25\pi}{6}+2\pi=\frac{-25\pi}{6}+\frac{12\pi}{6}=\frac{-13\pi}{6}$.
Mais $\frac{-13\pi}{6}\notin]-\pi;\pi]$
$\frac{-25\pi}{6}+2\times2\pi=\frac{-25\pi}{6}+\frac{24\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}\in[-\pi;\pi]$.
Donc $\frac{-\pi}{6}$ est la mesure principale.

Définition :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux réels non nuls. Soient M et N les points du cercle trigonométrique tels que $\vec{OM}$ est colinéaire de même sens à $\vec{u}$ et $\vec{ON}$ est colinéaire de même sens à $\vec{v}$.
On appelle mesure de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$ toute mesure en radian de l'angle $(\vec{OM};\vec{ON})$.



3 Propriétés des mesures d'angles orientés

Propriété,relation de Chasles :

Pour tous les vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$,

$$(\vec{u};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{w}) + (\vec{w};\vec{v})$$

Preuve :

Admise

Propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si $(\vec{u};\vec{v}) = 0$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire si et seulement si $(\vec{u};\vec{v}) = \pi$.

Preuve :

Conséquence directe de la définition des angles orientés.

Conséquences de la relation de Chasles :

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls,

- $(\vec{v};\vec{u}) = -(\vec{u};\vec{v})$;
- $(\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi$;
- $(-\vec{u};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi$;
- $(-\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v})$.

Preuve :

- On a $(\vec{u};\vec{u}) = 0$ et d'après la relation de Chasles $(\vec{u};\vec{u}) = (\vec{u};\vec{v}) + (\vec{v};\vec{u})$ donc $(\vec{u};\vec{v}) = -(\vec{v};\vec{u})$;
- $(\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + (\vec{v};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi$;
- de même que précédemment ;
- $(-\vec{u};-\vec{v}) = (-\vec{u};\vec{u}) + (\vec{u};\vec{v}) + (\vec{v};-\vec{v}) = \pi + (\vec{u};\vec{v}) + \pi = (\vec{u};\vec{v})$.

Exemple :

[Calculer en utilisant les propriétés des angles orientés]

On considère trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $(\vec{v};\vec{u}) = -\frac{2\pi}{3}$ et $(\vec{v};\vec{w}) = \frac{\pi}{6}$.

On cherche à calculer une mesure de l'angle orienté $\vec{u}w$.

On a $(\vec{u};\vec{v}) = -(\vec{v};\vec{u}) = \frac{2\pi}{3}$.

D'où $(\vec{u};\vec{w}) = (\vec{u};\vec{v}) + (\vec{v};\vec{w}) = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Remarques :

1. Si ABC est un triangle alors $(\vec{AB};\vec{AC})+(\vec{CA};\vec{CB})+(\vec{BC};\vec{BA})=\pi$, c'est à dire que la somme des angles orientés pris dans le même sens, dans un triangle est égale à π radians.
   En effet, on a $(\vec{AB};\vec{AC})+(\vec{CA};\vec{CB})+(\vec{BC};\vec{BA}) = (\vec{AB};\vec{CA})+(\vec{CA};\vec{AC})+(\vec{CA};\vec{BC})+(\vec{BC};\vec{CB})+(\vec{BC};\vec{BA}) = (\vec{AB};\vec{CA})+\pi+(\vec{CA};\vec{BC})+\pi+(\vec{BC};\vec{BA}) = 2\pi+(\vec{AB};\vec{CA})+(\vec{CA};\vec{BC})+(\vec{BC};\vec{BA}) = 2\pi+(\vec{AB};\vec{BA}) = 3\pi = \pi+2\pi$

2. Si ABC est un triangle isocèle en A, on $(\vec{BC};\vec{BA})=(\vec{CA};\vec{CB})$ ce qui généralise pour des angles orientés le fait que les angles à la base sont égaux dans un triangle isocèle.