Cosinus, sinus d'angles orientés, cours, première S

F.Gaudon

5 avril 2016

Table des matières

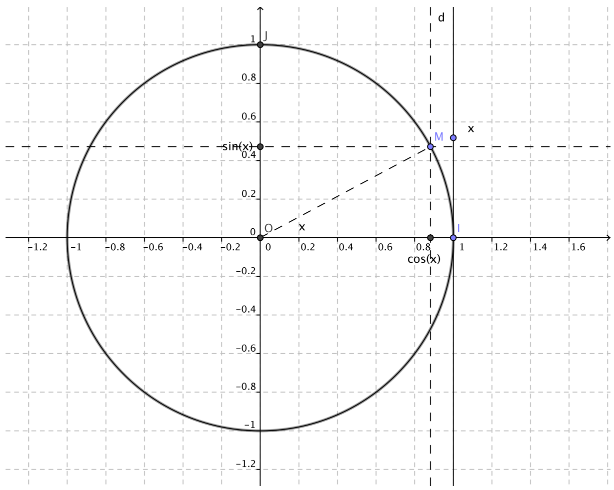
1 Cosinus et sinus d'un réel

Soit $(O : \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormal et $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.

Définition :

Soit M le point de $\mathcal{C}$ image du réel x. On appelle :

- cosinus de x noté $\cos(x)$ l'abscisse du point M ;
- sinus de x noté $\sin(x)$ l'ordonnée du point M.



Propriétés :

Pour tout réel x et tout entier relatif k :

- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$;
- $-1 \leq \sin(x) \leq 1$;
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$;
- $\cos(x + k2\pi) = \cos(x)$;
- $\sin(x + k2\pi) = \sin(x)$.

Preuve :

Conséquences directes de la définition.

Valeurs remarquables :

Angle en radians	angle en °	cosinus	sinus
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	90	0	1
π	180	-1	0

2 Cosinus et sinus d'un angle orienté

Propriété et définition :
Le cosinus (ou le sinus) d'un angle orienté est le cosinus (ou le sinus) d'une mesure en radians de cet angle orienté.

Preuve :
Si α et β sont deux mesures en radians de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$, alors il existe un entier k tel que $\alpha = \beta + k2\pi$.
On a donc $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$.

Propriétés :
Pour tout réel x :

- $\cos(-x) = \cos(x)$;
- $\sin(-x) = -\sin(x)$;
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$;
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$;
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$;
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$;
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$;
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$;
- $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$;
- $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$.

Exemple :
[Calculer le cosinus ou le sinus d'un angle associé]
$\cos(-\frac{7\pi}{6}) = \cos(\frac{7\pi}{6}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3 Équations trigonométriques

Propriété :
Soit $a \in \mathbb{R}$.

- L'équation $\cos(x) = \cos(a)$ a pour solutions les nombres réels $a + 2k\pi$ et $-a + 2k\pi$ tels que $k \in \mathbb{Z}$.
- L'équation $\sin(x) = \sin(a)$ a pour solutions les nombres réels $a + 2k\pi$ et $\pi - a + 2k\pi$ tels que $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple de savoir faire :
[Résoudre des équations trigonométriques]

Résolution de $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
En s'aidant du cercle trigonométrique, l'équation a pour solutions dans $[0; 2\pi]$ les nombres $\frac{\pi}{4}$ et $\pi - \frac{\pi}{4}$, c'est à dire $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.
Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont donc $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.