Variations des suites numériques, cours, première S

F.Gaudon

11 février 2012

Table des matières

1 Sens de variation

Définition :

- Une suite $(u_n)_n$ est *croissante* à partir d'un rang $p \in \mathbb{N}$ si pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
- Une suite $(u_n)_n$ est *décroissante* à partir d'un rang $p \in \mathbb{N}$ si pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n < 0$.

Propriété :

Soit (u_n) une suite définie à partir d'un rang $p \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction définie sur $[p; +\infty[$ telle que pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$, alors
- si f est décroissante sur $[p; +\infty[$, la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p ;
- si f est croissante sur $[p; +\infty[$, la suite (u_n) est croissante à partir du rang p.

Preuve (cas où f est décroissante par exemple) :
Pour tout entier naturel $n \geq p$ $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n)$. Or $p \leq n < n+1$ et f est décroissante sur $[p; +\infty[$ donc $u_{n+1} < u_n$ c'est à dire $u_{n+1} - u_n < 0$.

Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel non nul n. Alors $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{1}{x}$. On sait que f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ donc (u_n) est aussi strictement décroissante.

Propriété :

Soit (u_n) une suite définie à partir d'un certain rang $p \in \mathbb{N}$. Si pour tout entier naturel $n \geq p$, u_n est strictement positif, alors :
- si pour tout entier naturel $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang p ;
- si pour tout entier naturel $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p.

Preuve :
Découle immédiatement de l'équivalence $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ si et seulement si $u_{n+1} \geq u_n$ c'est à dire $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Algorithmique :
Algorithme qui donne, dans le cas d'une suite (u_n) définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, de premier terme u_p et croissante et non majorée, le plus petit rang n tel que la suite soit au-dessus d'un nombre M donné.

Exemple :
Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = 3u_n + 2$ pour tout entier naturel n non nul et par $u_1 = 2$. p désigne le premier rang de la suite (1 ici). M est choisi par l'utilisateur.

Données : p, u_p, M
Début traitement
  u prend la valeur de u_p ;
  tant que $u < M$ **faire**
    u prend la valeur de $f(u)$;
    p prend la valeur $p+1$
  fin
  Sorties : p
Fin

XCas :	**Python :**

`saisir("Premier rang p :",p);`
`saisir("Premier terme up :",u);`
`saisir("Seuil M :",M);`
`tantque (u<M) faire`
`   u:=3*u+2;`
`   p:=p+1;`
`ftantque;`
`afficher("Rang cherché : "+p);`
	`p=int(raw_input("Premier rang p : "))`
	`u=float(raw_input("Premier terme up : "))`
	`M=float(raw_input("Seuil M : "))`
	`while(u<M):`
	`  u=3*u+2`
	`  p=p+1`
	`print "Rang cherché :",p`

2 Application à l'Étude de suites particulières

2.1 Suites arithmétiques

Propriété (reconnaissance) :

Une suite $(u_n)_n$ est arithmétique si et seulement si pour tout entier n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante est alors la raison de la suite.

Propriété (sens de variation) :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n > 0$ c'est à dire $r > 0$ alors $(u_n)_n$ est croissante ;
- si pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n < 0$ c'est à dire $r < 0$ alors $(u_n)_n$ est décroissante ;
- si $r = 0$ alors (u_n) est constante.

2.2 Suites géométriques

Propriété (reconnaissance) :

Une suite $(u_n)_n$ est géométrique si pour tout entier n, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Sa valeur est alors la raison q de la suite.

Propriété (sens de variation) :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_p > 0$ où p est un entier naturel.
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante ;
- si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante ;
- si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante

Preuve :

On a pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = u_p q^{n+1-p} - u_p q^{n-p} = u_p q^{n-p}(q-1)$.

u_p et q étant positifs, $u_{n+1} - u_n$ est donc du signe de $q - 1$ d'où le résultat.