Sommes de termes de suites, cours, première S

F.Gaudon

26 mai 2011

Table des matières

1 Suites arithmétiques

Propriété :

Pour tout entier naturel n,

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve :
On a :

$$\begin{aligned}
&(1+2+3+\ldots+n)+(1+2+3+\ldots+n)\\
&=(1+2+3+\ldots+n)+(n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1)\\
&=(1+n)+(2+(n-1))+(3+(n-2))+\ldots+((n-1)+2)+(n+1)\\
&=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)+(n+1)\\
&=n(n+1)
\end{aligned}$$

donc $2(1+2+3+\ldots+n)=n(n+1)$ d'où le résultat.

Exemple :
$1+2+\ldots+100=\frac{100\times 101}{2}=\frac{10100}{2}=5050$

Application au calcul des premiers termes d'une suite arithmétique :
Soit (u_n) la suite arithmétiques de raison 3 et de premier terme $u_0=10$.
Alors

$$\begin{aligned}
u_0+u_1+u2+...+u_n &= 10+(10+3)+(10+3\times 2)+...+(10+3\times n)\\
&= 10\times(n+1)+3(1+2+3+...+n)\\
&= 10(n+1)+3\frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

D'où $u_{15}=10\times 16+2\frac{15\times 16}{2}=520$.

2 suites géométriques

Propriété :

Pour tout réel $q\neq 1$ on a :

$$1+q+q^2+...+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Preuve :
On développe $(1-q)(1+q+q^2+...+q^n) = 1+q+q^2+...+q^n-q-q^2-q^3-...-q^{n+1} = 1-q^{n+1}$ d'où le résultat.

Exemple :
$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^8 = \frac{1-2^9}{1-2} = \frac{511}{1} = 511$

Application au calcul de termes de suites géométriques :
Soit u_n la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

$$\begin{aligned} u_0+u_1+u_2+...u_n &= 3+3\times 2+3\times 2^3+...+3\times 2^n \\ &= 3(1+2+2^2+2^3+...+2^n) \\ &= 3\frac{1-2^{n+1}}{1-2} \end{aligned}$$

D'où $u_0+u_1+u_2+...+u_10 = 3\frac{1-2^11}{-1} = 6141$

3 Cas général

Algorithmique :
Algorithme de calcul de la somme des termes d'une suite jusqu'à un rang n donné, (u_n) étant définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n supérieur ou égal à un entier naturel p donné avec le premier terme u_p donné.

Données : p, n, u_p
Début traitement
- u prend la valeur de u_p ;
- S prend la valeur de u ;
- **pour** k ***allant de*** $p+1$ ***à*** n **faire**
  - u prend la valeur de $f(u)$;
  - S prend la valeur de $S+u$;
- **fin**
- **Sorties** : S

Fin

Exemple :
Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = 3u_n + 2$ pour tout entier naturel n non nul et par $u_1 = 2$ n. p désigne le premier rang de la suite (1 ici), n désigne le dernier rang.

XCas :	**Python :**

`saisir("Premier rang p :",p);`
`saisir("Premier terme up :",u);`
`saisir("Rang du terme :",n);`
`S:=u;`
`pour k de p+1 jusque n faire`
`   u:=3*u+2;`
`   S:=S+u;`
`   fpour;`
`afficher("Somme : "+S);`
	`p=int(raw_input("Premier rang p : "))`
	`u=float(raw_input("Premier terme up : "))`
	`n=int(raw_input("Rang n du dernier terme : "))`
	`s=u`
	`for k in range(p+1,n+1):`
	`  u=3*u+2`
	`  s=s+u`
	`print "Somme :",s`