Produit scalaire, cours, première S

F.Gaudon

1er avril 2012

1 Orthogonalité de vecteurs

Définition :

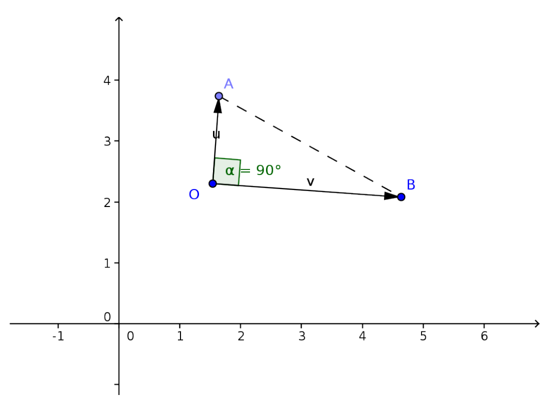
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* si ....
.... ou ....

Propriété :

Soit un repère orthonormé. On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ dans ce repère. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si ....

Preuve :

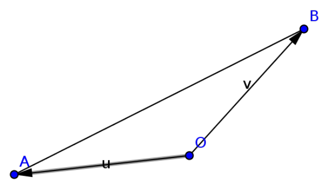
Soient A et B deux points tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$. Les deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si le triangle OAB .... c'est à dire .... d'après le théorème de Pythagore ce qui s'écrit encore .... soit .... d'où .... ou encore ....



2 Défaut d'orthogonalité et produit scalaire

Propriété et définition :

> Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et O, A et B trois points tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$. On appelle *produit scalaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre noté $\vec{u}.\vec{v}$ égal à :
>
> ....
>
> c'est à dire
>
> ....



Preuve :
$\vec{OA} = \vec{u}$ et $\vec{OB} = \vec{v}$ donc $\vec{AC} =$ ....+........ = ...+.......... D'où $AB^2 =$ ...., $OA^2 =$ .... et $OB^2 =$ .... ce qui donne la deuxième écriture.

Propriété :

> Dans tout repère orthonormé, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x'; y')$ alors
>
> $\vec{u}.\vec{v} =$ ....

Preuve :
$\vec{u} - \vec{v}$ a pour coordonnées (........;........). En outre, $\|\vec{u}\|^2 =$ ...., $\|\vec{v}\|^2 =$ .... et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 =$ .... = ... Donc $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) =$ ....

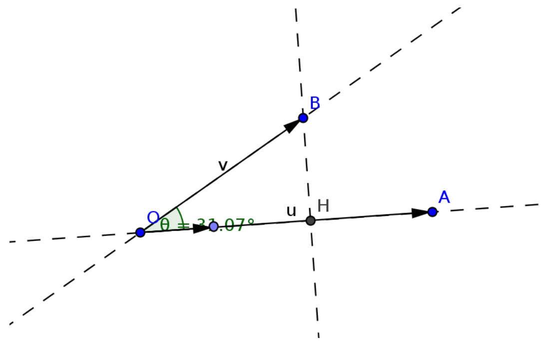
Propriété :

> Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si ....

3 Calculs de produits scalaires

Propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et O, A et B des points tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{OB} = \vec{v}$. On note $\theta = (\vec{OA}; \vec{OB})$.
Alors
$$\vec{u}.\vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



Preuve :
On considère le repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\vec{OA}$ soient colinéaires de même sens. $\vec{OB}$ a alors pour coordonnées polaires .... dans le repère polaire $(O; \vec{i})$ c'est à dire que $\vec{OB}$ a pour coordonnées cartésiennes .... $\vec{OA} = OA\vec{i}$ donc $\vec{OA}$ a pour coordonnées cartésiennes .... On a donc $\vec{OA}.\vec{OB} =$ .... d'où le résultat.

Propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et O, A et B trois points tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$. Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA). Alors
$$\vec{u}.\vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Preuve :
Avec les notations précédentes, $OH =$ .... donc $\vec{OA}.\vec{OB} = OA \times OH$.

4 Propriétés algébriques des produits scalaires

Propriété :

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tous les nombres réels k, on a :
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) =$ .... ;
- $(k\vec{u}).\vec{v} =$ ....

Preuve :
La première égalité est évidente. Dans un repère orthonormé, $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$, $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x'; y')$ et $\vec{w}$, $(x''; y'')$. Donc $\vec{v} + \vec{w}$ a pour coordonnées $(x' + x''; y' + y'')$ et $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w})$ $(x(x' + x''); y(y' + y''))$. Par ailleurs, $\vec{u}.\vec{v}$ a pour coordonnées $(xx'; yy')$, $\vec{u}.\vec{w}$ $(xx''; yy'')$ donc $\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ $(xx' + xx''; yy' + yy'')$ ce qui assure la deuxième égalité. On montre de même la troisième égalité.

Propriété et définition :

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même $\vec{u}.\vec{u}$ est noté .... et on a

$$\vec{u}^2 = \text{......................} = \text{............................}$$

En outre, si O et A sont deux points tels que $\vec{OA} = \vec{u}$, on a

$$\vec{OA}^2 = \text{..................} = \text{.......................}$$

Preuve :
$\vec{u}.\vec{u} =$ .... = ... = ... = ...