Produit scalaire, cours, première S

F.Gaudon

2 mai 2016

Table des matières

1 Norme d'un vecteur

Définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé. Soit $\vec{u}$ un vecteur et A et B deux points de coordonnées $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$ tels que $\vec{u}=\vec{AB}$. On appelle *norme* du vecteur $\vec{u}$ et on note $||\vec{u}||$ la *longueur* AB. On a donc $||u|| = AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Exemple :
[Calcul de la norme d'un vecteur]
Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(3;4)$ et $(-2;7)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan. alors $||\vec{u}|| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(3-(-2))^2+(4-7)^2} = \sqrt{5^2+(-3)^2} = \sqrt{34}$.

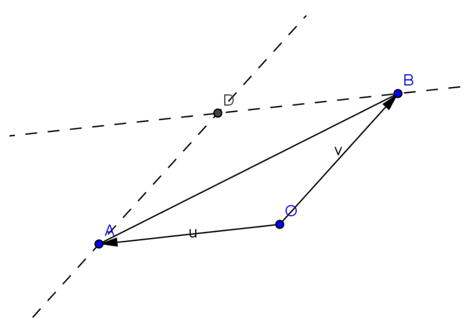
2 Produit scalaire

Propriété et définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et O, A et B trois points tels que $\vec{u}=\vec{OA}$ et $\vec{v}=\vec{OB}$. On appelle *produit scalaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre noté $\vec{u}.\vec{v}$ égal à :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Remarque :
Si D est le point tel que $OADB$ est un parallélogramme, en posant $\vec{u}=\vec{OA}$ et $\vec{v}=\vec{OB}$, alors $\vec{u}+\vec{v}=\vec{OD}$ et $\vec{OA}.\vec{OC} = \frac{1}{2}(OD^2-OA^2-OB^2) = \frac{1}{2}(OD^2-OA^2-AD^2)$ qui mesure le défaut d'orthogonalité par rapport au théorème de Pythagore.



Exemple :
[Calcul d'un produit scalaire]
Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB=4$, $AD=5$ et $AC=7$.
Calcul de $\vec{AB}.\vec{AD}$:
$\vec{AB}.\vec{AD} = \frac{1}{2}(\|\vec{AB}+\vec{AD}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AD}\|^2))$
Or $\vec{AB}+\vec{AD}=\vec{AC}$ donc
$\vec{AB}.\vec{AD} = \frac{1}{2}(AC^2-AB^2-AD^2) = \frac{1}{2}(7^2-4^2-5^2) = 4$

Propriété :

Dans tout repère orthonormé, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x;y)$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x';y')$ alors

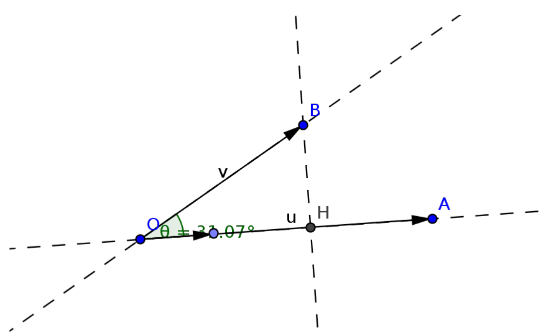
$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

Preuve :
$\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y')$. En outre, $\|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2$, $\|\vec{v}\|^2 = x'^2+y'^2$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x+x')^2+(y+y')^2 = x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2$. Donc $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = xx'+yy'$.

Exemple :
[Calculer un produit scalaire]
Soit $A(-1;5)$, $B(6;4)$ et $C(8;-4)$ dans un repère orthonormé.
Calcul de $\vec{AB}.\vec{AC}$:
$\vec{AB}(7;-1)$ et $\vec{AC}(9;-9)$ donc $\vec{AB}.\vec{AC} = 7\times 9 + (-1)\times(-9) = 63+9 = 72$

Propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et O, A et B des points tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{OB} = \vec{v}$. On note θ une mesure de $(\vec{OA};\vec{OB})$.
Alors
$$\vec{u}.\vec{v} = OA \times OB \times \cos(\theta) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta)$$



Preuve :
On considère le repère orthonormé $\mathcal{R} = (O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\vec{OA}$ soient colinéaires de même sens. $\vec{OB}$ a alors pour coordonnées cartésiennes $(OB\cos(\theta);OB\sin(\theta))$. $\vec{OA} = OA\vec{i}$ donc $\vec{OA}$ a pour coordonnées cartésiennes $(OA;0)$. On a donc $\vec{OA}.\vec{OB} = OA\times OB\cos(\theta) + 0\times OB\sin(\theta)$ d'où le résultat.

Remarques :
- Si u et v sont colinéaires de même sens alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$;
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire alors $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.

3 Orthogonalité de vecteurs

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* si l'un des deux vecteurs est nul ou si leurs directions sont perpendiculaires.

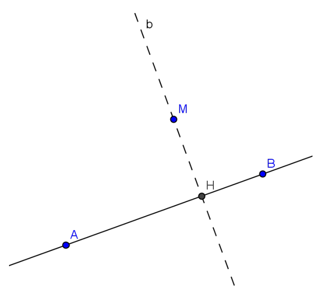
Propriété :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

4 Produit scalaire et projection orthogonale

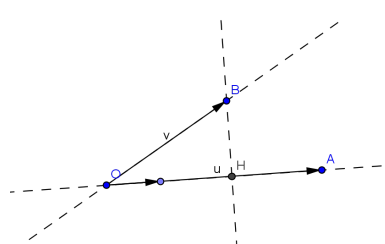
Définition :

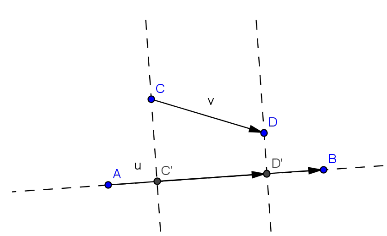
Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite (d) est le point d'intersection de la droite (d) et de la droite perpendiculaire à la droite (d) passant par M.



Propriété, produit scalaire et projection orthogonale d'un vecteur :

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et O, A et B trois points tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$. Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA). Alors
$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{OA}.\vec{OB} = \vec{OA}.\vec{OH}$$
- Soit A, B, C et D des points avec A et B distincts. Soit C' et D' les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB). Alors
$$\vec{AB}.\vec{CD} = \vec{AB}.\vec{C'D'}$$





Preuve :

- On note θ une mesure de $(\vec{OA};\vec{OB})$. $OH = OB\cos(\theta)$ donc $\vec{OA}.\vec{OB} = OA \times OH$.
- On a $\vec{AB}.\vec{CD} = \vec{AB}.(\vec{CC'} + \vec{C'D'} + \vec{D'D})$ d'où $\vec{AB}.\vec{CD} = \vec{AB}.\vec{CC'} + \vec{AB}.\vec{C'D'} + \vec{AB}.\vec{D'D} = \vec{AB}.\vec{C'D'}$ car les droites (CC') et (DD') sont perpendiculaires à la droite (AB).

Exemple :
[Calcul d'un produit scalaire]
Soit ABC un triangle isocèle de sommet A tel que $BC = 5$. Alors $\vec{BC}.\vec{BA} = \vec{BC}.\vec{BH}$ où H est le projeté orthogonal de A sur (BC). Comme (AH) est la hauteur issue du sommet principal du triangle ABC isocèle de sommet A, alors H est le milieu de $[BC]$ et $\vec{BC}.\vec{BA} = BC \times BH = 5 \times \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$.

5 Propriétés algébriques sur les produits scalaires

Propriété :

> Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tous les nombres réels k, on a :
> - $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$;
> - $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$;
> - $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$

Preuve :
La première égalité est évidente. Dans un repère orthonormé, $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x;y)$, $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x';y')$ et $\vec{w}$, $(x'';y'')$. Donc $\vec{v} + \vec{w}$ a pour coordonnées $(x' + x''; y' + y'')$ et $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = x(x'+x'') + y(y'+y'')$. Par ailleurs, $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$, $\vec{u}.\vec{w} = xx'' + yy''$ donc $\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w} = xx' + xx'' + yy' + yy''$ ce qui assure la deuxième égalité. On montre de même la troisième égalité.

Propriété et définition :

> Le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même $\vec{u}.\vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ et on a :
>
> $$\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$
>
> En outre, si O et A sont deux points tels que $\vec{OA} = \vec{u}$, on a :
>
> $$\vec{OA}^2 = \|\vec{OA}\|^2 = OA^2$$

Preuve :
$\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \cos(\vec{u};\vec{u}) = \|\vec{u}\|^2$

Propriété, identité remarquable :

> Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$.

Preuve :
$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$;