Applications du produit scalaire, cours, première S

1 Application au repérage

1.1 Vecteurs normaux à des droites

Définition :

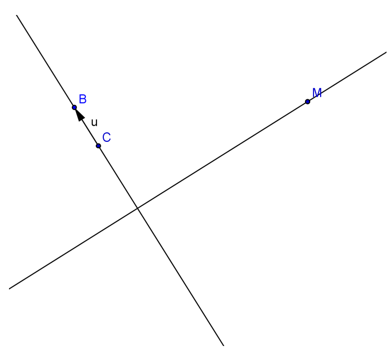
Un vecteur $\vec{n}$ non nul est dit normal à une droite $(\mathcal{D})$ si ....

Propriété :

Soient $\mathcal{D}$ une droite, A un point de cette droite et $\vec{n}$ un vecteur normal à cette droite. $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M tels que ....

Preuve :
Si M est un point de $(\mathcal{D})$ distinct de A, alors $\vec{AM}$ a une direction orthogonale à celle de $\vec{n}$ donc .... En outre, si $M = A$, on a évidemment ....

Réciproquement, si M est un point vérifiant ...., alors (AM) est une droite perpendiculaire à la direction de $\vec{n}$ et qui passe par A donc (AM) et $\mathcal{D}$ sont .... d'où ....



Propriété :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan.

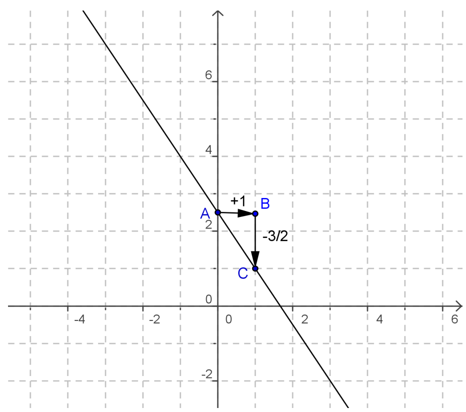
- Toute droite admet une équation de la forme .... où a, b et c sont trois réels avec $(a;b) \neq (0;0)$;
- réciproquement, soient a, b et c trois réels tels que $(a;b) \neq (0;0)$, l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que .... avec $(a;b) \neq 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées .... et de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées ....

Preuve :

- Soit $\vec{u}$ de coordonnées $(u; v)$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ et soit A un point de cette droite de coordonnées $(x_A; y_A)$. Alors $M(x; y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires si et seulement si .... c'est à dire .... ce qui est bien une équation de la forme cherchée.
- Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$. Si $b \neq 0$ l'équation .... s'écrit $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$. Le point A de coordonnées $(b; -a - \frac{c}{b})$ appartient donc à $\mathcal{D}$. Par suite $M(x; y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires c'est à dire si et seulement si $a(x-b)+b(y+\frac{c}{b}+a) = 0$ c'est à dire .... Les points de la droite sont donc bien les points vérifiant l'équation $ax + by + c = 0$. Le cas où $b = 0$ et alors $a \neq 0$ d'après l'hypothèse $(a; b) \neq (0; 0)$ se traite de la même manière.

Exemple :

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $3x + 2y - 5 = 0$. L'équation réduite de la droite est .... Le vecteur de coordonnées .... est .... et le vecteur de coordonnées .... est .... de la droite.



Exemple :

Soit $\mathcal{D}$ la droite de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $(3; 2)$ et passant par A de coordonnées $(-1; 4)$. Alors $M(x; y)$ appartient à la droite si et seulement si .... si et seulement si .... si et seulement si .... qui est donc une équation de la droite $\mathcal{D}$.

1.2 Cercle et produit scalaire

Propriété :

> Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que ....

Preuve :

$M \in \mathcal{C}$et M distinct de A et B si et seulement si MAB est un triangle rectangle c'est à dire si et seulement si $\vec{MA}$ et $\vec{MB}$ sont .... Les cas $M = A$ et $M = B$ sont évidents.

Propriété :

> Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(x_I; y_I)$ et de rayon r est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ tels que ....

Preuve :
Traduction analytique de .....

2 Formules de trigonométrie

Propriété (formules d'addition :

> Quels que soient les réels a et b,
>
> $$\cos(a+b) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
>
> $$\cos(a-b) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
>
> $$\sin(a+b) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
>
> $$\sin(a-b) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Preuve :
Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique de centre O et muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ direct. A et B sont les points du cercle tels que $(\vec{i}; \vec{OA}) = a$ et $(\vec{i}; \vec{OB}) = b$ en radians. $\vec{OA}$ a donc pour coordonnées $(\cos a; \sin a)$ et $\vec{OB}$ a pour coordonnées $(\cos b; \sin b)$. D'après la relation de Chasles our les angles orientés on a : $(\vec{OA}; \vec{OB}) = (\vec{OA}; \vec{i}) + (\vec{i}; \vec{OB})$ donc $(\vec{OA}; \vec{OB}) = b - a$.

Or $\vec{OA}.\vec{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ d'une part et $\vec{OA}.\vec{OB} = OA \times OB \times \cos(\vec{OA}; \vec{OB}) = OA \times OB \times \cos(b-a)$ d'autre part. D'où la formule $\cos(b-a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

La formule

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

s'obtient en prenant $-a$ au lieu de a.

On a en outre

$$\begin{aligned}\sin(a+b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a+b)) &= \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos(-b) + \sin(\frac{\pi}{2} - a)\sin(-b) \\ &= \sin a \cos b + \cos a \sin b\end{aligned}$$

et la dernière formule s'en déduit.

Propriété (formules de duplication) :

Pour tous les réels a on a :

$$\cos(2a) = ...$$

et

$$\sin(2a) = ...$$

mais aussi

$$\cos(2a) = ...$$

et

$$\cos(2a) = ...$$

Preuve :
La première égalité vient de la première formule d'addition en prenant $b = a$ et la deuxième égalité vient de la troisième formule d'addition en prenant aussi $a = b$.

Les deux dernières égalités s'obtiennent à partir de la première en utilisant la formule $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$.

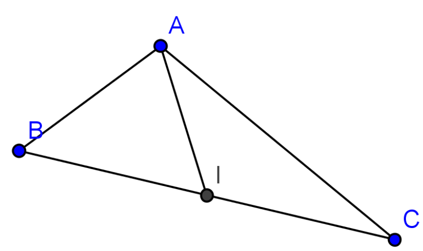
3 Relations métriques dans le triangle

3.1 Théorème de la médiane

Propriété :

Soit ABC un triangle. Soit I le milieu de $[BC]$. Alors :

....



Preuve :

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

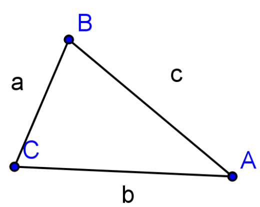
$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

3.2 Théorème d'Al Kashi (mathématicien arabe des XIV^{e}-XV^{e}siècle)

Propriété :

Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$, $\widehat{C} = \widehat{BCA}$. Alors :

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$



Preuve :

$\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Remarque :
Par permutation des côtés on a aussi :

$$b^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et

$$c^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

3.3 Lien entre aires, angles et côtés

Propriété :

Avec les notations précédentes, on appelle S la surface du triangle ABC.
Alors :

$$S = ...$$

et

$$S = ...$$

et

$$S = ...$$

Preuve :
Soit H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. On a S =..................... . Dans le triangle AHC rectangle en H on a $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{CH}{AC}$ donc $CH = AC \times \sin(\widehat{BAC}) = b\sin(\widehat{A})$ d'où S =...........................

Propriété :

Avec les hypothèses précédentes,

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$$

Preuve :
D'après la propriété précédente, on a $\frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$ donc $c\sin(\widehat{A}) = a\sin(\widehat{C})$ d'où $\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$. L'autre égalité se montre de même.