Applications du produit scalaire, cours, première S

F.Gaudon

31 mai 2016

Table des matières

1 Application au repérage

1.1 Vecteurs normaux à des droites

Définition :

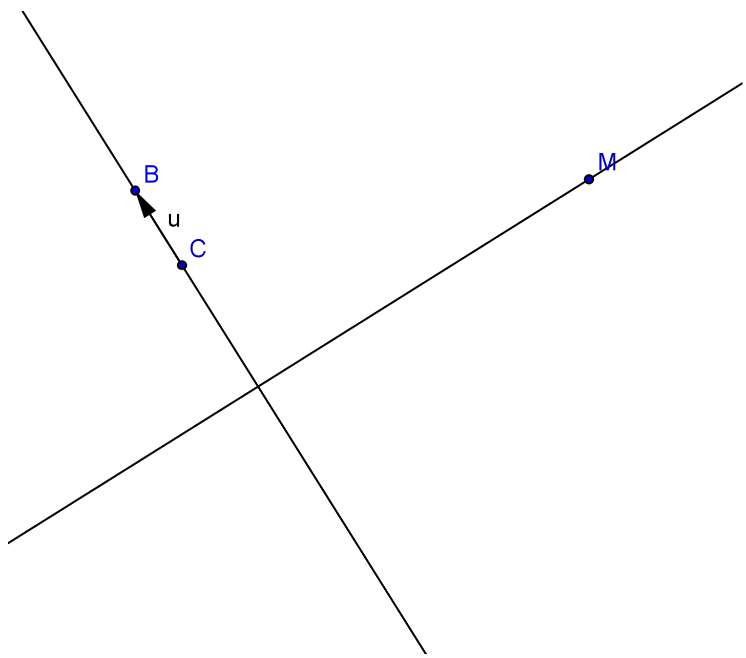
Un vecteur $\vec{n}$ non nul est dit normal à une droite $(\mathcal{D})$ si sa direction est orthogonale à celle de la droite.

Propriété :

Soient $\mathcal{D}$ une droite, A un point de cette droite et $\vec{n}$ un vecteur normal à cette droite. $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM}.\vec{n} = 0$.

Preuve :
Si M est un point de $(\mathcal{D})$ distinct de A, alors $\vec{AM}$ a une direction orthogonale à celle de $\vec{n}$ donc $\vec{n}.\vec{AM} = 0$. En outre, si $M = A$, on a évidemment $\vec{n}.\vec{AM} = 0$.

Réciproquement, si M est un point vérifiant $\vec{n}.\vec{AM} = 0$, alors (AM) est une droite perpendiculaire à la direction de $\vec{n}$ et qui passe par A donc (AM) et $\mathcal{D}$ sont confondues d'où $M \in \mathcal{D}$



Propriété :

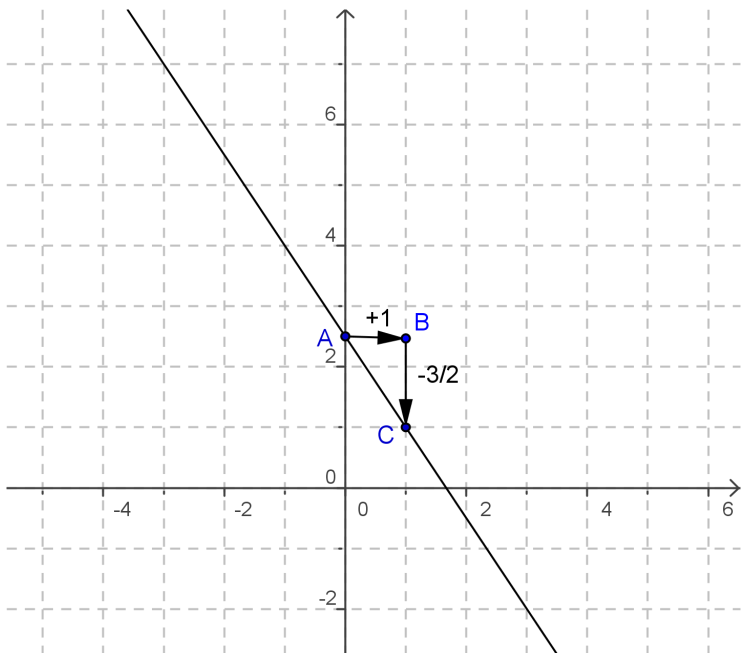
Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan.

- Toute droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont trois réels avec $(a;b) \neq (0;0)$;
- réciproquement, soient a, b et c trois réels tels que $(a;b) \neq (0;0)$, l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c = 0$ avec $(a;b) \neq 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(-b;a)$ et de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $(a;b)$.

Preuve :

- Soit $\vec{u}$ de coordonnées $(u; v)$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ et soit A un point de cette droite de coordonnées $(x_A; y_A)$. Alors $M(x; y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires si et seulement si $v(x-a) - u(y-b) = 0$ c'est à dire $vx - uy - va + ub = 0$ ce qui est bien une équation de la forme cherchée.
- Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$. Si $b \neq 0$ on l'équation $ax + by + c = 0$ s'écrit $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$. Le point A de coordonnées $(b; -a - \frac{c}{b})$ appartient donc à $\mathcal{D}$. Par suite $M(x; y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires c'est à dire si et seulement si $a(x-b) + b(y + \frac{c}{b} + a) = 0$ c'est à dire $ax + by + c = 0$. Les points de la droite sont donc bien les points vérifiant l'équation $ax + by + c = 0$. Le cas où $b = 0$ et alors $a \neq 0$ d'après l'hypothèse $(a; b) \neq (0; 0)$ se traite de la même manière.

Exemple :
Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $3x + 2y - 5 = 0$. L'équation réduite de la droite est $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$. Les vecteurs de coordonnées $(1; -\frac{3}{2})$ et $(-2; 3)$ sont des vecteurs directeurs de la droite.



Exemple :
Soit $\mathcal{D}$ la droite de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $(3; 2)$ et passant par A de coordonnées $(-1; 4)$. Alors $M(x; y)$ appartient à la droite si et seulement si $\vec{AM}.\vec{n} = 0$ si et seulement si $3(x+1) + 2(y-4) = 0$ si et seulement si $3x + 2y - 5 = 0$ qui est donc une équation de la droite $\mathcal{D}$.

1.2 Cercle et produit scalaire

Propriété :

Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{MA}.\vec{MB} = 0$

Preuve :
$M \in \mathcal{C}$et M distinct de A et B si et seulement si MAB est un triangle rectangle c'est à dire si et seulement si $\vec{MA}$ et $\vec{MB}$ sont orthogonaux. Les cas $M = A$ et $M = B$ sont évidents.

Propriété :

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(x_I; y_I)$ et de rayon r est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ tels que $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r^2$.

Preuve :
Traduction analytique de $IM^2 = r^2$.

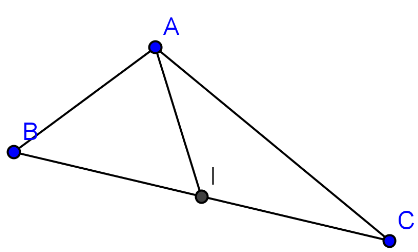
2 Relations métriques dans le triangle

2.1 Théorème de la médiane

Propriété :

Soit ABC un triangle. Soit I le milieu de $[BC]$. Alors :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$



Preuve :

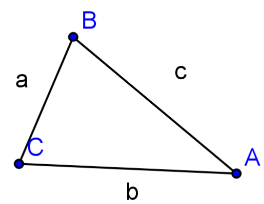
$$\begin{aligned}
AB^2 + AC^2 &= (\vec{AI} + \vec{IB})^2 + (\vec{AI} + \vec{IC})^2 \\
&= \vec{AI}^2 + \vec{IB}^2 + 2\vec{AI}.\vec{IB} + \vec{AI}^2 + \vec{IC}^2 + 2\vec{AI}.\vec{IC} \\
&= 2AI^2 + IB^2 + IC^2 + 2\vec{AI}.(\vec{IB} + \vec{IC}) \\
&= 2AI^2 + 2(\frac{1}{2}BC)^2 \\
&= 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2
\end{aligned}$$

2.2 Théorème d'Al Kashi (mathématicien arabe des XIVe-XVesiècle)

Propriété :

Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$, $\widehat{C} = \widehat{BCA}$. Alors :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$$



Preuve :

$$\begin{aligned} a^2 &= (\vec{BA} + \vec{AC})^2 \\ &= (\vec{AC} - \vec{AB})^2 \\ &= \vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 - 2\vec{AB}.\vec{AC} \\ &= c^2 + b^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= c^2 + b^2 - 2bc\cos(\widehat{A}) \end{aligned}$$

Remarque :
Par permutation des côtés on a aussi :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B})$$

et

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$$

2.3 Lien entre aires, angles et côtés

Propriété :

Avec les notations précédentes, on appelle S la surface du triangle ABC.
Alors :

$$S = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A})$$

et

$$S = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$$

et

$$S = \frac{1}{2}ac\sin(\widehat{B})$$

Preuve :
Soit H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. On a $S = \frac{1}{2}AB \times HC$. Dans le triangle AHC rectangle en H on a $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{CH}{AC}$ donc $CH = AC \times \sin(\widehat{BAC}) = b\sin(\widehat{A})$ d'où $S = \frac{1}{2}cb\sin(\widehat{A})$

Propriété :

Avec les hypothèses précédentes,

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$$

Preuve :
D'après la propriété précédente, on a $\frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$ donc $c\sin(\widehat{A}) = a\sin(\widehat{C})$ d'où $\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$. L'autre égalité se montre de même.

3 Formules de trigonométrie

Propriété (formules d'addition :

Quels que soient les réels a et b,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$$

$$\sin(a-b) = \cos(a)\sin(b) - \sin(a)\cos(b)$$

Preuve :
Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique de centre O et muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ direct. A et B sont les points du cercle tels que $(\vec{i};\vec{OA}) = a$ et $(\vec{i};\vec{OB}) = b$ en radians. $\vec{OA}$ a donc pour coordonnées $(\cos a;\sin a)$ et $\vec{OB}$ a pour coordonnées $(\cos b;\sin b)$. D'après la relation de Chasles our les angles orientés on a : $(\vec{OA};\vec{OB}) = (\vec{OA};\vec{i}) + (\vec{i};\vec{OB})$ donc $(\vec{OA};\vec{OB}) = b - a$.

Or $\vec{OA}.\vec{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ d'une part et $\vec{OA}.\vec{OB} = OA \times OB \times \cos(\vec{OA};\vec{OB}) = OA \times OB \times \cos(b-a)$ d'autre part. D'où la formule $\cos(b-a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

La formule

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

s'obtient en prenant $-a$ au lieu de a.

On a en outre

$$\begin{aligned}\sin(a+b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a+b)) &= \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos(-b) + \sin(\frac{\pi}{2} - a)\sin(-b)\\ &= \sin a \cos b + \cos a \sin b\end{aligned}$$

et la dernière formule s'en déduit.

Propriété (formules de duplication) :

Pour tous les réels a on a :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

et

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(b)$$

mais aussi

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$$

et

$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$$

Preuve :
La première égalité vient de la première formule d'addition en prenant $b = a$ et la deuxième égalité vient de la troisième formule d'addition en prenant aussi $a = b$.

Les deux dernières égalités s'obtiennent à partir de la première en utilisant la formule $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$.