Probabilités, cours, première S

1 Calculs de probabilités,rappels

Définition :
Soient A et B deux événements.

- L'événement $A \cap B$ (lire « A inter B ») est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois l'événement A *et* l'événement B.
- Lorsqu'aucune issue ne réalise A et B, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints ou incompatibles.
- L'événement $A \cup B$ (lire « A *ou* B ») est l'ensemble des issues qui réalisent au moins l'un des deux événements A *ou* B.
- L'événement $\bar{A}$ appelé événement contraire de A ou complémentaire de A est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A.

Propriété :
Soit P une loi de probabilité sur un ensemble E.

- Pour tous les événements A et B, on a :

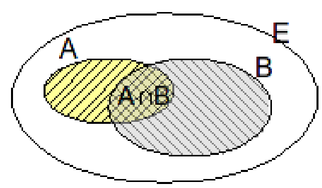
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Pour tout les événements A,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Preuve :

- Il suffit de dénombrer les issues élémentaires composant chacun des événements.
- On a $E = A \cup \bar{A}$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$ donc A et $\bar{A}$ sont incompatibles et $P(E) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Or $P(E) = 1$ donc $1 = P(A) + P(\bar{A})$ d'où $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.



Remarque :
En particulier, si A et B sont des événements *incompatibles*, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

2 Loi de probabilité de variables aléatoires

Définition :
Soit E l'univers associé à une expérience aléatoire, c'est à dire l'ensemble des issues possibles. Toute fonction définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée une *variable aléatoire*.

Définition :
Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers E d'une expérience aléatoire. Notons I l'ensemble des valeurs prises par X, $I = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$, et p_i la probabilité de l'événement « X prend la valeur x_i », événement noté $(X = x_i)$. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est la fonction définie sur I qui, à chaque valeur x_i, associe le nombre $p(X = x_i)$.

Notation :
On présente souvent la loi de probabilité sous forme de tableau :

valeur de X	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	...	$P(X = x_n)$

Exemple :
On lance un dé. Si les faces 1 et 2 apparaissent on gagne 3 euros. Si les faces 3,4,5 ou 6 sortent, on perd 2 euros.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de ce jeu. X prend les valeurs 3 et -2. On a $P(X = 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $P(X = -2) = \frac{4}{6}$.
D'où la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	-2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

3 Paramètres d'une variable aléatoire

Définition :

- On appelle *espérance mathématique* de X et on note $E(X)$ le nombre $E(x) = x_1p_1 + \ldots + x_np_n$;
- on appelle *variance* de X et on note $V(X)$ le nombre $V(X) = (x_1 - E(X))^2p_1 + \ldots + (x_n - E(X))^2p_n$;
- on appelle *écart type* de X et on note $\sigma(X)$ le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple :

L'espérance de la variable aléatoire de l'exemple précédent est :

$E(X) = \frac{2}{3} \times (-2) + \frac{1}{3} \times 3 = \frac{-4}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$

L'espérance mathématique étant négative, on peut considérer le jeu comme en défaveur du joueur.

Propriété :

Soient a et b deux nombres réels et X une variable aléatoire. Alors :

- $E(aX + b) = aE(X) + b$;
- $V(aX) = a^2V(X)$;

Preuve :

- Remarquons d'abord que la variable aléatoire $aX+b$ prend les valeurs ax_1+b, ax_2+b, ..., ax_n+b avec les probabilités respectives p_1, p_2, p_3, ..., p_n.
  D'où

$$E(aX+b) = p_1(ax_1+b) + p_2(a_x2+b) + ... + p_n(ax_n+b)$$
$$E(aX+b) = p_1ax_1 + p_1b + p_2ax_2 + p_2b + ... + p_nax_n + p_nb$$
$$E(aX+b) = a(p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n) + b(p_1 + p_2 + ... + p_n)$$
$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

- D'après ce qui précède, $E(aX) = aE(X)$. Par ailleurs,

$$V(aX) = p_1(ax_1 - E(aX))^2 + p_2(ax_2 - E(aX))^2 + ... + p_n(ax_n - E(aX))^2$$
$$V(aX) = p_1(ax_1 - aE(X))^2 + p_2(ax_2 - aE(X))^2 + ... + p_n(ax_n - aE(X))^2$$
$$V(aX) = a^2p_1(x_1 - E(X))^2 + a^2p_2(x_2 - E(X))^2 + ... + p_n(ax_n - aE(X))^2$$
$$V(aX) = a^2(p_1(x_2 - E - X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + ... + p_n(x_n - E(X))^2$$
$$V(aX) = a^2V(X)$$