Géométrie vectorielle plane, cours, première S

1 Géométrie vectorielle dans un repère

1.1 Compléments sur la colinéarité

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère.

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires si .... Le vecteur nul est par convention colinéaire à tous les vecteurs.

Propriété :

Soient A, B, C et D quatre points.

- A, B et C sont alignés si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont ....
- les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont ....

Propriété, condition de colinéarité :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ dans un repère du plan. Soit k un réel. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ....

Exemple :

[Déterminer si deux vecteurs définies par des points sont colinéaires]

Soit $A(3;2)$, $B(2;5)$, $C(-3;8)$ et $D(2;4)$ quatre points.
Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$ donc $\vec{AB}$(.......; ....) c'est à dire $\vec{AB}$(.......; ....).
Le vecteur $\vec{CD}$ a de même pour coordonnées (......; ......).
La condition de colinéarité donne .... donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ .... et les droites (AB) et (CD) ....

1.2 norme d'un vecteur

Définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé. On appelle *norme* d'un vecteur $\vec{u}$ et on note $\|\vec{u}\|$ la longueur de ce vecteur. En particulier, si A et B sont deux points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ alors ....

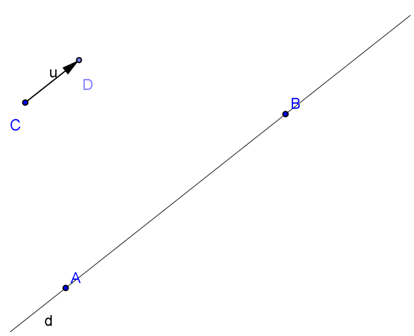
Propriété :
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x;y)$ dans un repère orthonormé, alors $\|\vec{u}\|$ =.............

Exemple :
[Calculer la norme d'un vecteur]
On considère les points $A(3;2)$ et $B(2;5)$.
Alors $\vec{AB}$ a pour coordonnées .... D'où $\|\vec{AB}\|$ =.........................

1.3 Vecteurs directeurs de droites

Définition :
On appelle *vecteur directeur* d'une droite $\mathcal{D}$ tout vecteur non nul $\vec{u}$ tel qu'il existe deux points A et B de la droite $\mathcal{D}$ vérifiant ....

Propriété :
Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point A et soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de cette droite. Alors $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont ....



Propriété :
Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées .... est un vecteurdirecteur de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = mx + p$

Preuve :
On considère les points $A(0;p)$ et $B(1;m+p)$.

Ces deux points appartiennent à la droite $\mathcal{D}$ puisque leur coordonnées vérifient l'équation ....

Le vecteur $\vec{AB}$ est un vecteur directeur et a pour coordonnées .... soit .... donc ....

1.4 Équations cartésiennes de droites

Propriété :
Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan. Toute droite du plan admet une équation de la forme .... où a, b et c sont trois réels avec .... et x et y sont les inconnues.
En outre, le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées .... est un vecteur directeur de la droite.

Preuve :
Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ de coordonnées $(\alpha; \beta)$ et A un point de la droite de coordonnées $(x_A; y_A)$.
Alors la droite est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont ....
Or $\vec{AM}$ a pour coordonnées $(x - x_A; y - y_A)$ donc la condition .... permet de dire que M appartient à la droite si et seulement si .... c'est à dire $\beta x - \alpha y + y_A\alpha - x_A\beta = 0$.
Il suffit donc de poser ...., ... et .... pour obtenir le résultat.

Exemple :
Soit (d) la droite passant par le point A de coordonnées $(2; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(4; 5)$.

- $M(x; y)$ appartient à la droite si et seulement si .... c'est à dire .... c'est à dire ....
- $\vec{u}(4; 5)$ est un vecteur directeur donc en posant .... on obtient $a =$........ et $b =$...... d'où une équation est de la forme .... Comme en outre, $A(2; 3)$ appartient à la droite, on a .... c'est à dire .... et ..... d'où l'équation ....

Propriété :
réciproquement, toute équation de la forme .... où a, b et c sont trois réels avec .... est l'équation d'une droite du plan de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées ....

Preuve :
Si $b \neq 0$, l'équation s'écrit $y =$........................ qui est l'équation réduite d'une droite de vecteur directeur de coordonnées .... ou donc de coordonnées ....
Si $b = 0$, l'équation s'écrit .... c'est à dire $x =$....... puisque $a \neq 0$ et il s'agit bien de l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées et donc de vecteur directeur de coordonnées ....

Définition :
Toute équation de droite de la forme $ax+by+c=0$ où $(a;b)\neq(0;0)$ est appelée *équation* ....

2 Géométrie vectorielle non repérée

Propriétés :

- Soient A, B, C et D quatre points. $\vec{AB}=\vec{DC}$ si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est ....
- On a pour tous les points A, B et C, ... (*relation de Chasles*).

Exemple :
[Transformer l'écriture d'une expression vectorielle]
soient A et B deux points. Placement du point N tel que $\vec{AN}=4\vec{BN}$.
$\vec{AN}=$ .... d'après la relation de Chasles.
$\vec{AN}=$ .... d'après la propriété $k\vec{u}+k\vec{u'}=k(\vec{u}+\vec{u'})$
$\vec{AN}-4\vec{AN}=$ .... en ajoutant l'opposé de $4\vec{AN}$
$-3\vec{AN}=$ .... d'après la propriété $k\vec{u}+k'\vec{u}=(k+k')\vec{u}$
D'où $\vec{AN}=$ .... et $\vec{AN}=$ ....

Propriété :
Soient A, B et C trois points tels que $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires. Alors Tout vecteur $\vec{u}$ du plan peut s'écrire .... où a et b sont deux réels.

Preuve :
$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ n'étant pas colinéaires, A, B et C ne sont pas alignés et forment donc un repère $(A;\vec{AB};\vec{AC})$ du plan.

Exemple d'expression d'un vecteur en fonction de deux autres :
Soient A, B et C trois points. Soit M le point défini par : $\vec{AM}=3\vec{BC}-2\vec{AC}$. Exprimons $\vec{AM}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$: $\vec{AM}=$ ....
$\vec{AM}=$ ....