Géométrie vectorielle plane, cours, première S

F.Gaudon

25 septembre 2015

Table des matières

1 Géométrie vectorielle dans un repère

1.1 Compléments sur la colinéarité

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère.

Définition :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires si il existe un réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$. Le vecteur nul $\vec{0}$ est par convention colinéaire à tous les vecteurs.

Propriété :
Soient A, B, C et D quatre points distincts deux à deux.

- A, B et C sont alignés si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires ;
- les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

Propriété, condition de colinéarité :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}})$ et $(x_{\vec{v}};y_{\vec{v}})$ dans un repère du plan. Soit k un réel. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si

$$x_{\vec{u}}y_{\vec{v}}-x_{\vec{v}}y_{\vec{u}}=0$$

Preuve :

- Si $\vec{u}=k\vec{v}$ où k est un réel alors $x_{\vec{u}}=kx_{\vec{v}}$ et $y_{\vec{u}}=ky_{\vec{v}}$. D'où $x_{\vec{u}}y_{\vec{v}}-x_{\vec{v}}y_{\vec{u}}=kx_{\vec{v}}y_{\vec{v}}-x_{\vec{v}}ky_{\vec{v}}=0$.
- Réciproquement, on suppose que $x_{\vec{u}}y_{\vec{v}}-x_{\vec{v}}y_{\vec{u}}=0$. Si $\vec{u}=\vec{0}$ alors il est colinéaire à $\vec{v}$. Sinon $\vec{0}\neq 0$. Alors $x_{\vec{u}}\neq 0$ ou $y_{\vec{u}}\neq 0$. On traite le cas où $x_{\vec{u}}\neq 0$, le cas $y_{\vec{u}}$ se traiterait de même. L'égalité $x_{\vec{u}}y_{\vec{v}}-x_{\vec{v}}y_{\vec{u}}=0$ donne $x_{\vec{u}}y_{\vec{v}}=x_{\vec{v}}y_{\vec{u}}$ donc $y_{\vec{v}}=y_{\vec{u}}\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}}$. On pose alors $k=\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}}$ et on a donc $y_{\vec{v}}=ky_{\vec{u}}$ et $x_{\vec{u}}=kx_{\vec{v}}$.

Exemple :
[Déterminer si deux vecteurs définies par des points sont colinéaires]
Soit $A(3;2)$, $B(2;5)$, $C(-3;8)$ et $D(2;4)$ quatre points.
Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(x_B-x_A;y_B-y_A)$ donc $\vec{AB}(5-2;2-3)$ c'est à dire $\vec{AB}(3;-1)$.
Le vecteur $\vec{CD}$ a de même pour coordonnées $(5;-4)$.
La condition de colinéarité donne $x_{\vec{u}}y_{\vec{v}}-x_{\vec{v}}y_{\vec{u}}=4\times(-4)-(-3)\times 5=-1$ donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ne sont pas colinéaires et les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

1.2 norme d'un vecteur

Définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé. On appelle *norme* d'un vecteur $\vec{u}$ et on note $\|\vec{u}\|$ la longueur de ce vecteur. En particulier, si A et B sont deux points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ alors

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{AB}\| = AB$$

Propriété :

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x;y)$ dans un repère orthonormé, alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Pour tout vecteur $\vec{AB}$ avec $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, on a

$$\|\vec{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple :

[Calculer la norme d'un vecteur]

On considère les points $A(3;2)$ et $B(2;5)$.

Alors $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(-1;3)$. D'où $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

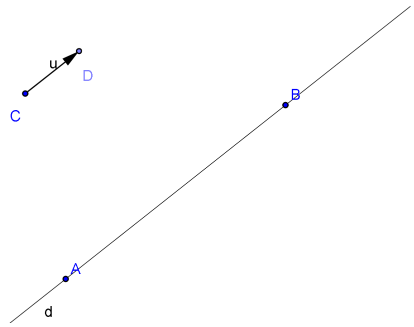
1.3 Vecteurs directeurs de droites

Définition :

On appelle *vecteur directeur* d'une droite $\mathcal{D}$ tout vecteur non nul $\vec{u}$ tel qu'il existe deux points A et B de la droite $\mathcal{D}$ vérifiant $\vec{AB} = \vec{u}$.

Propriété :

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point A et soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de cette droite. Alors $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.



Propriété :
Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(1;a)$ est un vecteur directeur de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation réduite $y = ax + b$

Preuve :
On considère les points $A(0;b)$ et $B(1;a+b)$.

Ces deux points appartiennent à la droite $\mathcal{D}$ puisque leur coordonnées vérifient l'équation $y = ax+b$.

Le vecteur $\vec{AB}$ est un vecteur directeur et a pour coordonnées $(1-0;a+b-b)$ soit $(1;a)$.

1.4 Équations cartésiennes de droites

Propriété :
Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ où a, b et c sont trois réels avec $(a;b)\neq 0$ c'est à dire a ou b non nul et x et y sont les inconnues.

En outre, le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-b;a)$ est un vecteur directeur de la droite.

Preuve :
Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ de coordonnées $(\alpha;\beta)$ et A un point de la droite de coordonnées $(x_A;y_A)$.

Alors la droite est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Or $\vec{AM}$ a pour coordonnées $(x-x_A;y-y_A)$ donc la condition $x_{\vec{u}}y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}}y_{\vec{u}}$ permet de dire que M appartient à la droite si et seulement si $\alpha(y-y_A)-\beta(x-x_A = 0$ c'est à dire $-\beta x+\alpha y-y_A\alpha+x_A\beta = 0$.

Il suffit donc de poser $a=-\beta$, $b=\alpha$ et $c = y_A\alpha + x_A\beta$ pour obtenir le résultat.

Exemple :

[Déterminer une équation cartésienne d'une droite de vecteur directeur donné et passant par un point donné]

Soit (d) la droite passant par le point A de coordonnées $(2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(4;5)$.

- $M(x;y)$ appartient à la droite si et seulement si $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires c'est à dire $4(y-3)-5(x-2)=0$ c'est à dire $4y-12-5x+10=0$ donc $-5x+4y-2=0$.
- $\vec{u}(4;5)$ est un vecteur directeur donc en posant $-b=4$ et $a=5$ on obtient $a=5$ et $b=-4$ d'où une équation de la forme $5x-4y+c=0$. Comme en outre, $A(2;3)$ appartient à la droite, on a $5\times 2-4\times 3+c=0$ c'est à dire $-2+c=0$ et $c=2$ d'où l'équation $5x-4y+2=0$. On remarque donc qu'il n'existe pas une unique équation cartésienne.

Propriété :

réciproquement, toute équation de la forme $ax+by+c=0$ où a, b et c sont trois réels avec $(a;b)\neq(0;0)$ est l'équation d'une droite du plan de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(-b;a)$.

Preuve :

Si $b\neq 0$, l'équation s'écrit $y=-\frac{ax}{b}-\frac{c}{b}$ qui est l'équation réduite d'une droite de vecteur directeur de coordonnées $(1;-\frac{a}{b})$ donc $(-b;a)$ en multipliant par b pour obtenir un vecteur colinéaire.
Si $b=0$, l'équation s'écrit $ax=-c$ c'est à dire $x=-\frac{c}{a}$ puisque $a\neq 0$ et il s'agit bien de l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées et donc de vecteur $(0;a)$ donc $(-b;a)$

Définition :

Toute équation de droite de la forme $ax+by+c=0$ où $(a;b)\neq(0;0)$ est appelée *équation cartésienne*.

Exemple :

[Donner un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne donnée]

$3x+2y-5=0$ est l'équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-2;3)$.

2 Géométrie vectorielle non repérée

Propriétés :

- Soient A, B, C et D quatre points. $\vec{AB} = \vec{DC}$ si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.
- *Relation de Chasles* : On a pour tous les points A, B et C, $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

Exemple :

[Exprimer un vecteur en fonction d'un autre]

soient A et B deux points. Placement du point N tel que $\vec{AN} = 4\vec{BN}$.

On cherche à exprimer $\vec{AN}$ en fonction de $\vec{AB}$ plutôt.

$\vec{AN} = 4(\vec{BA} + \vec{AN})$ d'après la relation de CHASLES)

$\vec{AN} = 4\vec{BA} + 4\vec{AN}$ d'après la propriété $k\vec{u} + k\vec{u'} = k(\vec{u} + \vec{u'}$

$\vec{AN} - 4\vec{AN} = 4\vec{BA} + 4\vec{AN} - 4\vec{AN}$ en ajoutant l'opposé de $4\vec{AN}$

$-3\vec{AN} = 4\vec{BA}$ d'après la propriété $k\vec{u} + k'\vec{u} = (k + k')\vec{u}$

$\vec{AN} = -\frac{4}{3}\vec{BA}$ et enfin $\vec{AN} = \frac{4}{3}\vec{AB}$

Propriété :

Soient A, B et C trois points tels que $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires. Alors Tout vecteur $\vec{u}$ du plan peut s'écrire $\vec{u} = a\vec{AB} + b\vec{BC}$ où a et b sont deux réels.

Preuve :

$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ n'étant pas colinéaires, A, B et C ne sont pas alignés et forment donc un repère $(A; \vec{AB}; \vec{AC})$ du plan.

Exemple :

[Expression d'un vecteur en fonction de deux autres]

Soient A, B et C trois points. Soit M le point défini par : $\vec{AM} = 3\vec{BC} - 2\vec{AC}$. Exprimons $\vec{AM}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$:

$\vec{AM} = 3(\vec{BA} + \vec{AC}) - 2\vec{AC}$

$\vec{AM} = 3\vec{BA} + 3\vec{AC} - 2\vec{AC}$

D'où $\vec{AM} = 3\vec{BA} + \vec{AC} = -3\vec{AB} + \vec{AC}$