Second degré, cours, première S

1 Equations du second degré

Définition :

- Toute solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est appelée .... du trinôme f défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout x réel.
- On appelle *discriminant* du trinôme le réel Δ défini par $\Delta =$............ .

Exemple :
2 est une racine de $2x^2 - 5x + 2$.

Le discriminant du trinôme $2x^2 - 5x + 2$ est $\delta =$....... .

Remarque :
Ordonner les termes du trinôme avant de calculer le discriminant.

Propriété :

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ....
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a ....
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a ....

Preuve :
On a vu auparavant que $f(x) = a((x - \alpha)^2 + \beta)$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

On a $f(x) = 0$ qui s'écrit encore puisque $a \neq 0$, $(x - \alpha)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$

Donc $(x - \alpha)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

On reconnaît le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $\Delta < 0$, comme le premier membre $(x - \alpha)^2$ est nécessairement positif, l'équation .... ;
- si $\Delta = 0$, l'équation s'écrit $(x - \alpha)^2 = 0$ donc .... ;
- si $\Delta > 0$, l'équation donne $x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ ou $x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ donc $x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}}$ ou $x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}}$.

Exemple :
On considère l'équation $2x^2 - 5x + 2 = 0$. On a vu que $\Delta = 9 = 3^2$ est positif. Il y a donc .... à cette équation :

....

Propriété :

Avec les mêmes notations que précédemment, on a pour $f(x) = ax^2 + bx + c$:
- si $\Delta = 0$, $f(x) =$............... où ....;
- si $\Delta > 0$, $f(x) =$............... où ....
- si $\Delta < 0$, $f(x)$ ....;

Preuve :
On a vu précédemment que $f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2})$.
- Si $\Delta = 0$, on a donc $f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2)$ ce qui est bien la factorisation attendue ;
- si $\Delta > 0$, on a $a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)$ pour tout x réel.
  Or $x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$.
  En outre, $x_1x_2 = \frac{1}{4a^2}(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta}) = \frac{1}{4a^2} = (b^2 - b\sqrt{\Delta} + b\sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta}^2)$ donc $x_1x_2 = \frac{1}{4a^2}(b^2 - \Delta) = \frac{1}{4a^2}(b^2 - b^2 + 4ac) = \frac{c}{a}$.
  D'où $a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = ax^2 + bx + c = f(x)$ ce qui justifie le deuxième cas.
- Par l'absurde : si $f(x)$ admettait une factorisation dans $\mathbb{R}$, $f(x)$ sécrirait $f(x) = (x - r)P(x)$ où P est un polynôme de degré inférieur strictement à 2 et r est un réel. $f(x)$ admettrait donc une racine r réelle ce qui est n'est pas le cas d'après la propriété précédente.

Exemple :
On a vu que l'équation $2x^2 - 5x + 2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 9$ et admet deux solutions 2 et $\frac{1}{2}$. On a donc $2x^2 - 5x + 2 =$ ....

2 Inéquations du second degré

Propriété :

Avec les mêmes notations que précédemment,
- si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de ....;
- si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de ....;
- si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe de ....

Preuve :
- Si $\Delta < 0$, on utilise la forme canonique $f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2})$. On a $(x + \frac{b}{2a})^2$ qui est positif pour tout réel x et $-\frac{b^2-4ac}{4a^2} = -\frac{\Delta}{4a^2}$ qui est strictement positif donc $f(x)$ est du signe de a pour tout réel x.
- Si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x - x_0)^2$ d'après la propriété précédente donc $f(x)$ est du signe de a pour tout x réel et ne s'annule que pour $x = x_0$.
- Si $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. On fait un tableau de signe suivant le signe a. Faisons le par exemple pour $a < 0$. On obtient :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		...		...		...	
$x-x_1$		...	...	...		...	
$x-x_2$		...		...	...	...	
$f(x)$		...	...	...	...	...	

ce qui justifie la propriété dans le cas où $a<0$. On procède de même pour le cas $a>0$.

Exemple :

Résolution de $\frac{-x^2+6+7}{x+2} \geq 0$.

$x+2=0$ équivaut à $x=$ .... donc .... est la seule valeur interdite.

Résolution de $-x^2+6x+7=0$. On a $\Delta=$........... .... $\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes $x_1=$........... .... et $x_2=$......... ....

Étude de signe :

x	$-\infty$		...		...		...		$+\infty$
$x+2$		...	...	...		...		...	
$-x^2+6x+7$		...		...	...	...	...	...	
$\frac{-x^2+6x+7}{x+2}$		...	....	...	...	...	...	...	

Donc $S=$..........

3 Interprétation graphique

Propriété :

> Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont les abscisses des points d'intersection s'ils existent de la parabole représentant la fonction f et de l'axe des abscisses.

Interprétation :

- Si $\Delta > 0$, la courbe coupe l'axe des abscisses .... ;
- si $\Delta = 0$, la courbe coupe l'axe des abscisses .... ;
- si $\Delta < 0$, la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses.

En outre, si ...., la parabole a ses branches tournées vers le haut et tournées vers le bas si ....