Second degré, cours, première S

F.Gaudon

15 avril 2015

Table des matières

1 Equations du second degré

Définition :

- Toute solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est appelée *racine* du trinôme f défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout x réel.
- On appelle *discriminant* du trinôme le réel Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemple :
2 est une racine de $2x^2 - 5x + 2$.
Le discriminant du trinôme $2x^2 - 5x + 2$ est $\delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9$.

Remarque :
Ordonner les termes du trinôme avant de calculer le discriminant.

Propriété :

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution réelle dite racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Preuve :
On a vu auparavant que $f(x) = a((x-\alpha)^2 + \beta)$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.
On a $f(x) = 0$ qui s'écrit encore puisque $a \neq 0$, $(x-\alpha)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$
Donc $(x-\alpha)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$.
On reconnaît le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
- si $\Delta < 0$, comme le premier membre $(x-\alpha)^2$ est nécessairement positif, l'équation n'a pas de solution ;
- si $\Delta = 0$, l'équation s'écrit $(x-\alpha)^2 = 0$ donc $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$ est l'unique solution ;
- si $\Delta > 0$, l'équation donne $x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ ou $x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ donc $x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}}$ ou $x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}}$ d'où les deux solutions x_1 et x_2 en simplifiant.

Exemple :
On considère l'équation $2x^2 - 5x + 2 = 0$. On a vu que $\Delta = 9 = 3^2$ est positif. Il y a donc deux solutions à cette équation :
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+3}{2\times 2} = 2$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-3}{2\times 2} = \frac{1}{2}$.

Algorithmique :
Algorithme de résolution des équations du second degré c'est à dire de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Données : a, b, c
Début traitement
  Δ prend la valeur $b^2 - 4ac$;
  si $\Delta < 0$ **alors**
    Afficher "Pas de solution réelle"
  fin
  si $\Delta = 0$ **alors**
    x_0 prend la valeur $\frac{-b}{2a}$;
    Afficher "Une unique solution ",x_0 ;
  fin
  si $\Delta > 0$ **alors**
    x_1 prend la valeur $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
    x_2 prend la valeur $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
    Afficher "Deux solutions réelles distinctes",x_0," et ",x_1 ;
  fin
Fin

Exemple :

TI :	**Casio :**	**XCas :**

Prompt A,B,C
$B^2 - 4 * A * C \triangleright D$
Disp "Delta",D
If $D > 0$
Then
$(-B + \sqrt{D})/(2 * A) \triangleright U$
$(-B - \sqrt{D})/(2 * A) \triangleright V$
Disp "U",U
Disp "V",V
Else
If $D = 0$
Then
$-B/(2 * A) \triangleright S$
Disp "S",S
Else
Disp "PAS DE SOLUTION"
	$"A"? \to A$
	$"B"? \to B$
	$"C"? \to C$
	$B^2 - 4 * A * C \to D$
	"Delta" :D◢
	If $D > 0$
	Then $((-B + \sqrt{D})/(2 * A) \to U$
	$(-B - \sqrt{D})/(2 * A) \to V$
	"U=" :U◢
	"V=" :V◢
	Else If $D = 0$
	Then $-B/(2 * A) \to S$
	"S=" :S◢
	Else "PAS DE SOLUTION"
		`equation2nddegre():={`
		`local a,b,c,d,x0,x1,x2;`
		`saisir("a =",a);`
		`saisir("b =",b);`
		`saisir("c =",c);`
		`d:=b^2-4a*c;`
		`si d<0 alors afficher("Pas de solution réelle.");`
		`fsi;`
		`si d=0 alors`
		`x0:=-b/(2*a);`
		`afficher("Une unique solution",x0);`
		`fsi;`
		`si d>0 alors`
		`x1:=(-b+sqrt(d))/(2*a);`
		`x2:=(-b-sqrt(d))/(2*a);`
		`afficher("Deux solutions distinctes : ",x1,x2);`
		`fsi;`
		`};`

Propriété :

Avec les mêmes notations que précédemment, on a pour $f(x) = ax^2 + bx + c$:
- si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x - x_0)^2$ où x_0 est la racine double du trinôme ;
- si $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les deux racines distinctes du trinôme.
- si $\Delta < 0$, $f(x)$ n'admet pas de factorisation dans $\mathbb{R}$;

Preuve :
On a vu précédemment que $f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2})$.
- Si $\Delta = 0$, on a donc $f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2)$ ce qui est bien la factorisation attendue ;
- si $\Delta > 0$, on a $a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)$ pour tout x réel.
  Or $x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$.
  En outre, $x_1x_2 = \frac{1}{4a^2}(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta}) = \frac{1}{4a^2} = (b^2 - b\sqrt{\Delta} + b\sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta}^2)$ donc $x_1x_2 = \frac{1}{4a^2}(b^2 - \Delta) = \frac{1}{4a^2}(b^2 - b^2 + 4ac) = \frac{c}{a}$.
  D'où $a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = ax^2 + bx + c = f(x)$ ce qui justifie le deuxième cas.
- Par l'absurde : si $f(x)$ admettait une factorisation dans $\mathbb{R}$, $f(x)$ sécrirait $f(x) = (x - r)P(x)$ où P est un polynôme de degré inférieur strictement à 2 et r est un réel. $f(x)$ admettrait donc une racine r réelle ce qui est n'est pas le cas d'après la propriété précédente.

Exemple :
On a vu que l'équation $2x^2 - 5x + 2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 9$ et admet deux solutions 2 et $\frac{1}{2}$. On a donc $2x^2 - 5x + 2 = a(x - x_1)(x - x_2) = 2(x - 2)(x - \frac{1}{2})$.

2 Inéquations du second degré

Propriété :

Avec les mêmes notations que précédemment,
- si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas ;
- si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et s'annule en x_0 uniquement ;
- si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines x_1 et x_2 et du signe opposé à l'intérieur.

Preuve :
- Si $\Delta < 0$, on utilise la forme canonique $f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2})$. On a $(x + \frac{b}{2a})^2$ qui est positif pour tout réel x et $-\frac{b^2-4ac}{4a^2} = -\frac{\Delta}{4a^2}$ qui est strictement positif donc $f(x)$ est du signe de a pour tout réel x.
- Si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x - x_0)^2$ d'après la propriété précédente donc $f(x)$ est du signe de a pour tout x réel et ne s'annule que pour $x = x_0$.
- Si $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. On fait un tableau de signe suivant le signe a. Faisons le par exemple pour $a < 0$. On obtient :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		-		-		-	
$x - x_1$		-	0	+		+	
$x - x_2$		-		-	0	+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	

ce qui justifie la propriété dans le cas où $a < 0$. On procède de même pour le cas $a > 0$.

Exemple :
Résolution de $\frac{-x^2+6+7}{x+2} \geq 0$.

$x + 2 = 0$ équivaut à $x = -2$ donc -2 est la seule valeur interdite.

Résolution de $-x^2 + 6x + 7 = 0$. On a $\Delta = 36 - 4 \times (-1) \times 7 = 64$. $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-6+8}{-2} = -1$ et $x_2 = \frac{-6-8}{-2} = 7$.

Étude de signe :

x	$-\infty$		-2		-1		7		$+\infty$
$x+2$		-	0	+		+		+	
$-x^2+6x+7$		-		-	0	+	0	-	
$\frac{-x^2+6x+7}{x+2}$		+	$\|$	-	0	+	0	-	

Donc $S =]-\infty; -2[\cup [-1; 7]$

3 Interprétation graphique

Propriété :

> Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont les abscisses des points d'intersection s'ils existent de la parabole représentant la fonction f et de l'axe des abscisses.

Interprétation :

- Si $\Delta > 0$, la courbe coupe l'axe des abscisses en deux points distincts ;
- si $\Delta = 0$, la courbe a pour unique point commun avec l'axe des abscisses son sommet ;
- si $\Delta < 0$, la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses.

En outre, si $a > 0$, la parabole a ses branches tournées vers le haut et tournées vers le bas si $a < 0$.