Généralités sur les fonctions, cours, première S

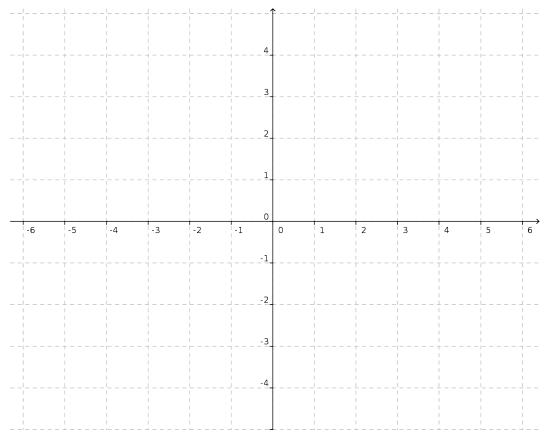
1 Fonctions de référence

1.1 Fonction carré

- $\mathcal{D}_f =$..... ;
- définie pour tout x réel par $x \longmapsto x^2$;
- strictement .... sur $]-\infty; 0]$ et strictement .... sur $[0; +\infty[$;
- .... sur $]-\infty; +\infty[$;
- représentée graphiquement par une ....

Variations :

x	$-\infty$	0	
$f(x)$	....	....	....

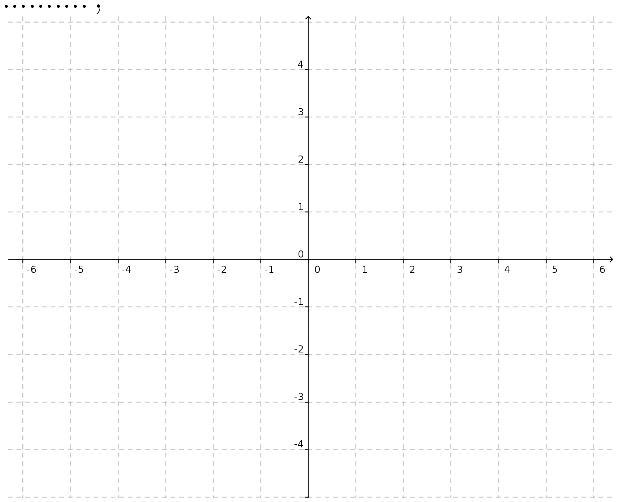


Signe :

x	$-\infty$	.....	$+\infty$
$f(x)$	.....	.....	.....

1.2 Fonction inverse

- $\mathcal{D}_f =$......... ;
- définie pour tout $x \neq 0$ par $x \longmapsto \frac{1}{x}$;
- strictement .... sur .... et strictement .... sur .... ;
- strictement .... sur .... et strictement .... sur .... ;
- représentée graphiquement par une .... ;



Variations :

x	$-\infty$	.....	$+\infty$
$f(x)$	....	.....	....

Signe :

x	$-\infty$	.....	$+\infty$
$f(x)$	......	.....	.....

1.3 Fonctions affines

- $\mathcal{D}_f =$....... ;
- définie pour tout x réel par $x \longmapsto ax+b$ où a et b sont deux réels fixés ;
- **Variations :**

.... :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	....

.... :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	....

- **Signe :**

.... :

x	$-\infty$	....	$+\infty$
signe de $ax+b$	......	.....	....

.... :

x	$-\infty$	....	$+\infty$
signe de $ax+b$	......	.....	.....

- Représentée graphiquement par une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

1.4 Fonction racine carrée

Définition :

> On appelle fonction *racine carrée* la fonction définie sur .... par $x \mapsto \sqrt{x}$.

Variations :

x	0 $\quad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	 0

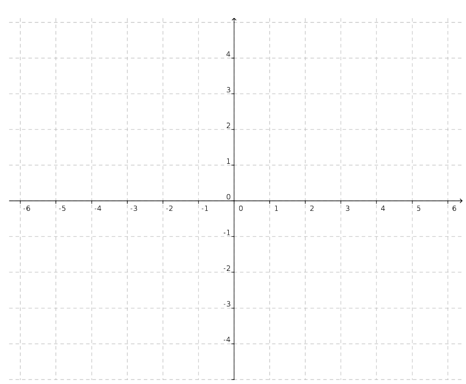
Signe :

x	..... $\quad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	.... $\quad$ ....

Preuve des variations :

Soient x_1 et x_2 deux réels positifs tels que $x_1 < x_2$. Alors $x_2 - x_1$...... .
Or, $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} =$...............
Comme $\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}$..... et $x_2 - x_1$...... on a donc $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}$...... c'est à dire $\sqrt{x_2}$....$\sqrt{x_1}$ ce qui signifie que la fonction racine carrée est une fonction strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Représentation graphique :



1.5 Fonction valeur absolue

Définition :

On appelle fonction *Valeur absolue* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

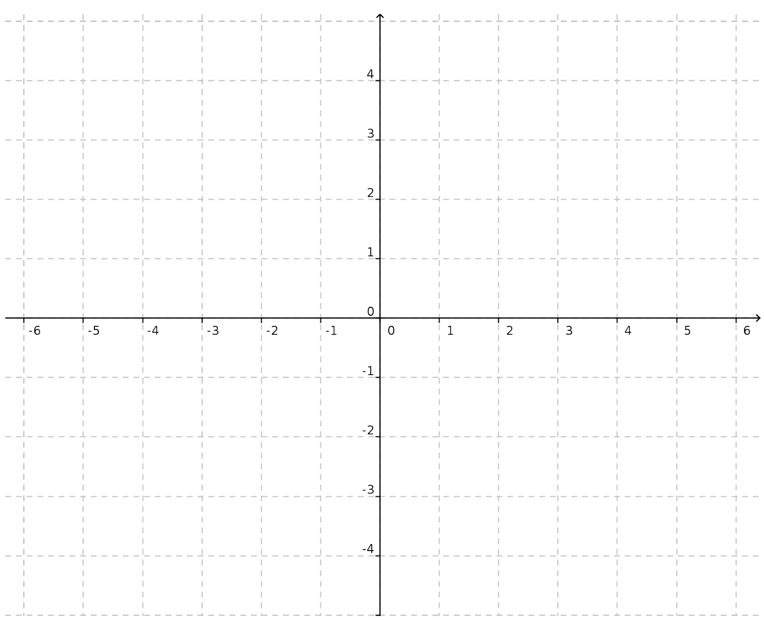
Variations :

x	$-\infty$	......	$+\infty$
$\|x\|$	....	.....	....

Signe :

x	$-\infty$	.....	$+\infty$
$\|x\|$	......	.....	....

Représentation graphique :



Remarque :

La fonction valeur absolue est une fonction paire : sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans tout repère orthogonal du plan.

2 Fonctions associées

Propriété :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I. Soient k et λ deux réels.

- La fonction $u+k$ définie pour tout réel x de I par $(u+k)(x) = u(x)+k$ a des variations .... à celle de la fonction u sur I ;
- si $\lambda > 0$, la fonction λu définie pour tout réel x de I par $(\lambda u)(x) = \lambda u(x)$ a des variations .... à celles de u sur I ;
- si $\lambda < 0$, la fonction λu a des .... à celles de u sur I.

Preuve :

On ne traitera que le cas où u est strictement décroissante sur I, les autres cas se traitant de la même manière. Soient x_1 et x_2 deux réels de I tels que $x_1 < x_2$.

u étant strictement décroissante sur I, on en déduit que $u(x_1) > u(x_2)$.

- $u(x_1) + k > u(x_2) + k$ ce qui montre que $u + k$ est aussi décroissante sur I ;
- $\lambda > 0$ donc .... donc λu est strictement .... sur I ;
- $\lambda < 0$ donc .... donc λu est strictement .... sur I ce qui montre la propriété dans ce cas.

Propriété :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.

- Si u est strictement positive, la fonction $\frac{1}{u}$ définie sur I par $(\frac{1}{u})(x) = \frac{1}{u(x)}$ a des variations .... à celles de u sur I.
- si u est positive sur I, la fonction $\sqrt{u}$ définie sur I par $\sqrt{u}(x) = \sqrt{u(x)}$ a des variations .... à celles de u sur I.

Preuve :

On ne traite que le cas où u est strictement décroissante, les autres cas se traitant de même. Soient x_1 et x_2 deux réels de I tels que $x_1 < x_2$. u est strictement décroissante donc $u(x_1) > u(x_2)$

- comme $u > 0$ on a .... d'où, par stricte décroissance de la fonction inverse, ... ce qui montre que la fonction $\frac{1}{u}$ est strictement .... sur I ;
- comme $u \geq 0$ on a .... d'où, par stricte croissance de la fonction racine carrée, ... ce qui montre que la fonction $\sqrt{u}$ est strictement .... sur I.