Fonctions polynômes du second degré, cours, première S

Propriété et définition :

Pour toute fonction *polynôme du second degré* f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, \quad b, \quad c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, on a :

$$...$$

où

$$\alpha = ...$$

et

$$\beta = ...$$

Cette écriture est appelée *forme canonique* de la fonction f.

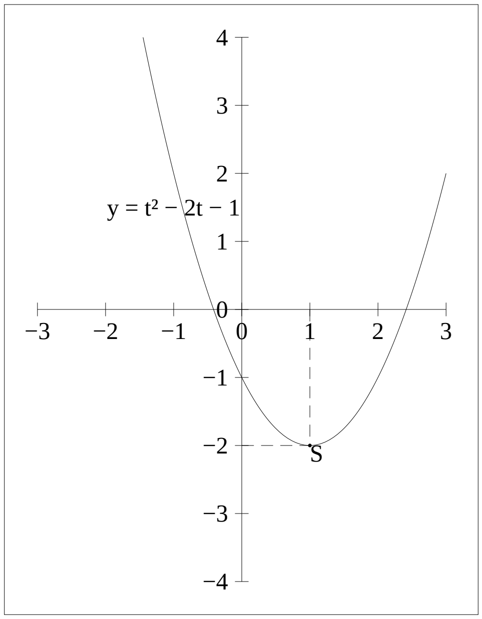
Preuve :

On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= ...... \\ &= ...... \\ &= .... \\ &= .... \\ &= .... \end{aligned}$$

Propriété :

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan, la représentation graphique de la fonction trinôme du second degré f est une parabole dont le point S de coordonnées $(\alpha; \beta)$ est le sommet.



Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a :

$f(x) = ...$
$f(x) = ...$
$f(x) = ...$
$f(x) = ...$

donc le point S de coordonnées $(....;....)$ est le sommet de la parabole représentant la fonction f.

Propriété :

Pour toute fonction polynôme du second degré sous la forme ....,

- si $a > 0$ la fonction f est .... sur l'intervalle .... et .... sur l'intervalle .... et admet un minimum en ....
- si $a < 0$ la fonction f est .... sur l'intervalle .... et .... sur l'intervalle .... et admet un maximum en ....

Synthèse :
Si ....,

x	-∞ .... $+\infty$
$f(x)$	....

et si ....,

x	-∞ .... $+\infty$
$f(x)$	....

Preuve :
Supposons $a < 0$, l'autre cas se traiterait de la même manière. On a $f(x) =$.................. où a,α et v sont des réels avec $a \neq 0$.

- Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle .... et tels que $x_1 \leq x_2$. On a donc $x_1 - \alpha$.......$x_2 - \alpha \leq 0$. Comme la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$, on a donc $(x_1-\alpha)^2$......$(x_2-\alpha)^2$ d'où en multipliant par le nombre a négatif, $a(x_1-\alpha)^2+v$.......$a(x_2-\alpha)^2+v$ et $a(x_1-\alpha)^2+v$....$a(x_2-\alpha)^2+v$ c'est à dire $f(x_1)$.....$f(x_2)$ ce qui justifie que la fonction est .... sur ....
- Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle .... et tels que $x_1 \leq x_2$. On a donc $0 \leq x_1 - \alpha$.......$x_2 - \alpha$. Comme la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$, on a donc $(x_1-\alpha)^2$......$(x_2-\alpha)^2$ d'où en multipliant par le nombre a négatif, $a(x_1-\alpha)^2+v$........$a(x_2-\alpha)^2+v$ et $a(x_1-\alpha)^2+v$.....$a(x_2-\alpha)^2+v$ c'est à dire $f(x_1)$.....$f(x_2)$ ce qui justifie que la fonction est .... sur ....

On a donc bien un maximum pour $x =$...... .

Exemple :
Dans l'exemple précédent $f(x) = -2(x-3)^2 + 28$. $a = -2$. a est négatif donc on a le tableau de variations suivants :

x	-∞ .... $+\infty$
$f(x)$	....