Fonctions polynômes du second degré, cours, première S

F.Gaudon

15 avril 2015

Propriété et définition :

Pour toute fonction *polynôme du second degré* f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, \quad b, \quad c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, on a :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

où

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

et

$$\beta = f(\alpha) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Cette écriture est appelée *forme canonique* de la fonction f.

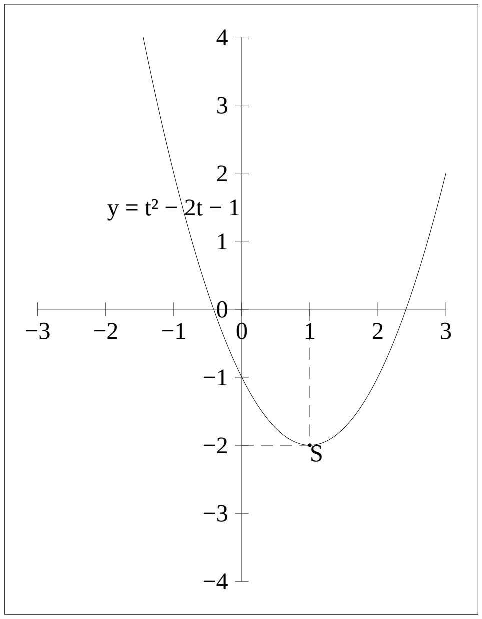
Preuve :

On a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \\
&= a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) \\
&= a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}) \\
&= a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}) \\
&= a(x - (-\frac{b}{2a}))^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a})
\end{aligned}$$

Propriété :

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan, la représentation graphique de la fonction trinôme du second degré f est une parabole dont le point S de coordonnées $(\alpha; \beta)$ est le sommet.



Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a :

$$f(x) = 3(x^2 - 2x + \frac{1}{3})$$
$$f(x) = 3((x-1)^2 - 1 + \frac{1}{3})$$
$$f(x) = 3((x-1)^2 - \frac{2}{3})$$
$$f(x) = 3(x-1)^2 - 2$$

donc le point S de coordonnées $(1; -2)$ est le sommet de la parabole représentant la fonction f.

Propriété :

Pour toute fonction polynôme du second degré sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + a\beta$,

- si $a > 0$ la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; \alpha]$ et croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et admet un minimum en α.
- si $a < 0$ la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty; \alpha]$ et décroissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et admet un maximum en α.

Synthèse :
Si $a > 0$,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
			$f(\alpha)$		

et si $a < 0$,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
			$f(\alpha)$		
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Preuve :
Supposons $a < 0$, l'autre cas se traiterait de la même manière. On a $f(x) = a(x-\alpha)^2 + v$ où a,α et v sont des réels avec $a \neq 0$.

- Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle $]-\infty;\alpha]$ et tels que $x_1 \leq x_2$. On a donc $x_1-\alpha \leq x_2-\alpha \leq 0$. Comme la fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$, on a donc $(x_1-\alpha)^2 \geq (x_2-\alpha)^2$ d'où en multipliant par le nombre a négatif, $a(x_1-\alpha)^2+v \leq a(x_2-\alpha)^2+v$ et $a(x_1-\alpha)^2+v \leq a(x_2-\alpha)^2+v$ c'est à dire $f(x_1) \leq f(x_2)$ ce qui justifie que la fonction est croissante sur $]-\infty;\alpha]$.
- Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle $[\alpha;+\infty[$ et tels que $x_1 \leq x_2$. On a donc $0 \leq x_1-\alpha \leq x_2-\alpha$. Comme la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$, on a donc $(x_1-\alpha)^2 \leq (x_2-\alpha)^2$ d'où en multipliant par le nombre a négatif, $a(x_1-\alpha)^2+v \geq a(x_2-\alpha)^2+v$ et $a(x_1-\alpha)^2+v \geq a(x_2-\alpha)^2+v$ c'est à dire $f(x_1) \geq f(x_2)$ ce qui justifie que la fonction est décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

On a donc bien un maximum pour $x = \alpha$.

Exemple :
Dans l'exemple précédent $f(x) = -2(x-3)^2 + 28$. $a = -2$. a est négatif donc on a le tableau de variations suivants :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
			28		
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	