# Fonctions dérivées, cours, première S

F.Gaudon

28 juin 2015

## Table des matières

# 1 Fonction dérivée et dérivées de fonctions usuelles

**Définition :**
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. $f$ est dite *dérivable sur $I$* si elle est dérivable en tout réel $a$ de $I$.
La fonction qui, à tout réel $a$, associe le nombre dérivé $f'(a)$ en $a$, est appelée *fonction dérivée* de $f$ et notée $f'$.

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $\mathcal{D}_{f'}$ |
|---|---|---|
| $k$ | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x$ | $1$ | $\mathbb{R}$ |
| $mx+p$ | $m$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^2$ | $2x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0;+\infty[$ |

**Preuves :**
Pour tout $a \in I$ et tout $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$ on a :

- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$
  d'où la dérivée de $x \mapsto k$ est $x \mapsto 0$ en tout réel $a$ ;
- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a+h-a}{h} = 1$
  d'où la dérivée de $x \mapsto x$ est $x \mapsto 1$ en tout réel $a$ ;
- $\frac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h} = \frac{mh}{h} = m$
  d'où la dérivée de $x \mapsto mx+p$ est $x \mapsto m$ en tout réel $a$ ;
- $\frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = 2a+h$
  qui tend vers $2a$ quand $h$ tend vers $0$ ;
- $\frac{(a+h)^n-a^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{k=n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}h^k}{h}$
  qui tend vers $na^{n-1}$ quand $h$ tend vers $0$ ;
- pour la fonction inverse,

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} &= \frac{\frac{a}{a(a+h)}-\frac{a+h}{a(a+h)}}{h}\\ &= \frac{a-(a+h)}{ah(a+h)}\\ &= \frac{-1}{a(a+h)}\end{aligned}$$

  qui tend vers $\frac{-1}{a^2}$ quand $h$ tend vers 0.

- pour la fonction racine carrée,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} &= \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \\ &= \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\end{aligned}$$

qui tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ quand $h$ tend vers 0.

**Exemples :**

- $x \mapsto 3x-2$ a pour fonction dérivée $x \mapsto 3$ pour tout réel $x$.
- $x \mapsto x^3$ a pour fonction dérivée $x \mapsto 3x^2$ pour tout réel $x$.

**Algorithmique :**

Algorithme qui trace les tangentes en des points, d'abscisses régulièrement espacées de 0,5 unités sur l'intervalle $[-3;3]$, à la courbe d'une fonction $f$ de dérivée $f'$.

```
Données : a
Début traitement
    pour a allant de -3 à 3 par pas de 0,5 faire
        y prend la valeur f(a) ;
        m prend la valeur f'(a) ;
        Placer le point A de coordonnées (a, y) ;
        Tracer la droite passant par A et de coefficient directeur m ;
    fin
Fin
```

**Exemple :**

On utilise ici la fonction $f : x \mapsto x^2$ de dérivée $f'(x) = 2x$.

| TI : | Casio : | XCas : |
|---|---|---|
| ClrDraw<br>DispGraph<br>For($A$,−3,3,0.5)<br>$A^2 \triangleright U$<br>$2*A \triangleright M$<br>Pt-On($A$,$U$)<br>Line(−5,$U+M*(-5-A)$,5,$U+M*(5-A)$)<br>End | | `tracertangentes():={`<br>`local a,f,m,y, A,L,d;`<br>`f(x):=x^2;`<br>`pour a de -3 jusque 3`<br>`pas 0.5 faire`<br>`y:=f(a);`<br>`m:=diff(f,x,a);`<br>`A:=point(a+i*f(a));`<br>`d:=droite(A,pente=m);`<br>`L:=L,A,d;`<br>`fpour`<br>`return L;` |

# 2 Opérations sur les fonctions dérivables

## 2.1 Somme

**Propriété :**
Soient $u$ et $v$ deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $I$, alors $u+v$ est définie et dérivable sur $I$ et :

$$(u+v)' = u' + v'$$

**Preuve :**
$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$ qui tend vers $u'(a)+v'(a)$ quand $h$ tend vers 0.

**Exemple :**
**[Calculer la fonction dérivée d'une somme de deux fonctions dérivables]**
$x \mapsto \frac{1}{x} + x^4$ a pour fonction dérivée $x \mapsto -\frac{1}{x^2} + 4x^3$ pour tout réel $x$ non nul.

## 2.2 Multiplication par un nombre réel $k$

**Propriété :**
Soient $u$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ et $k$ un nombre réel, alors $ku$ est définie et dérivable sur $I$ et :

$$(ku)' = ku'$$

**Preuve :**
Même démarche que la précédente.

**Exemple :**
**[Calculer la fonction dérivée d'une fonction produit d'un réel par une fonction dérivable]**
$x \mapsto 3x^5 - 3x^2 + 3$ a pour fonction dérivée $x \mapsto 3 \times 5x^4 - 3 \times 2x + 0$ c'est à dire $x \mapsto 15x^4 - 6x$ pour tout réel $x$.

## 2.3 Produit

**Propriété :**
Soient $u$ et $v$ deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $I$, alors $uv$ est dérivable sur $I$ et

$$(uv)' = u'v + v'u$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned}
\frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} &= \frac{(u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\
&= \frac{(u(a+h) - u(a))v(a+h)}{h} + \frac{u(a)(v(a+h) - v(a))}{h} \\
&= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a+h) + u(a)\frac{v(a+h) - v(a)}{h}
\end{aligned}$$

qui tend vers $u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$ quand $h$ tend vers 0.

**Exemple :**
**[Calculer la fonction dérivée du produit de deux fonctions dérivables]**
On considère $f : x \mapsto (3x-2)\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}$. On pose $u(x) = 3x - 2$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Alors $u'(x) = 3$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = 3\sqrt{x} - (3x-2)\frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout réel $x$.

### 2.4 Quotient

**Propriété :**
Soient $u$ et $v$ deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $I$, avec pour tout $x$ de $I$, $v(x) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est définie et dérivable sur $I$ et

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

En particulier,

$$(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{u}{v}(a+h) - \frac{u}{v}(a)}{h} &= \frac{\frac{u(a+h)}{v(a+h)} - \frac{u(a)}{v(a}}{h} \\
&= \frac{\frac{u(a+h)}{v(a+h)} - \frac{u(a+h)}{v(a)} + \frac{u(a+h)}{v(a)} - \frac{u(a)}{v(a)}}{h} \\
&= \frac{u(a+h)(\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}) + \frac{1}{v(a)}(u(a+h) - u(a))}{h} \\
&= u(a+h)\frac{v(a) - v(a+h)}{hv(a)v(a+h)} + \frac{1}{v(a)}\frac{u(a+h) - u(a)}{h} \\
&= -u(a+h)\frac{v(a+h) - v(a)}{h}\frac{1}{v(a)v(a+h)} + \frac{1}{v(a)}\frac{u(a+h) - u(a)}{h}
\end{aligned}$$

qui tend vers $\frac{-u(a)v'(a)}{v(a)v(a)} + \frac{u'(a)}{v(a)}$ c'est à dire $\frac{-u(a)v'(a)+u'(a)v(a)}{v(a)^2}$ quand $h$ tend vers 0.

**Exemple :**
**[Calculer la fonction dérivée d'une fonction quotient de deux fonctions dérivables]**
On considère $f : x \mapsto \frac{3x^2-x}{4-5x}$ définie pour tout réel $x$ différent de $\frac{4}{5}$. On pose $u(x) = 3x^2 - x$ et $v(x) = 4 - 5x$. Alors $u'(x) = 6x - 1$ et $v'(x) = -5$ d'où $f'(x) = (\frac{u'v-v'u}{v^2})(x) = \frac{(6x-1)(4-5x)-(-5)(3x^2-x)}{(4-5x)^2} = \frac{24x-4-30x+5x+15x^2-5x}{(4-5x)^2} = \frac{15x^2-6x-4}{(4-5x)^2}$.