# Loi de Bernoulli et loi binomiale, cours, première S

## 1 Loi de Bernoulli

**Définition :**
Soit $p$ un nombre réel tel que $p \in [0;1]$. Soit $X$ une variable aléatoire. On dit que $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$ si :

- $X$ prend pour seules valeurs .............. ............... ...............
- $P(X = ......) = ......$ et $P(X = ........) = ..........$

**Propriété :**
Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$.

- $E(X) = .......$ ;
- $V(X) = .........$

**Preuve :**
D'une part, $E(X) =$.....................
En outre, $V(X) =$.................

**Algorithmique :**
Algorithme de simulation d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p$.

**Données** : $p$ : nombre décimal entre 0 et 1 ;
**Début traitement**
  $t$ prend une valeur aléatoire décimale entre 0 inclus et 1 exclu ;
  **si** ............. **alors**
    Afficher "Succès" ;
  **fin**
  **sinon**
    Afficher "Échec" ;
  **fin**
**Fin**

## 2 Schéma de Bernoulli

**Définition :**
Deux expériences sont dites *indépendantes* si ..................... ................. ................. ...................

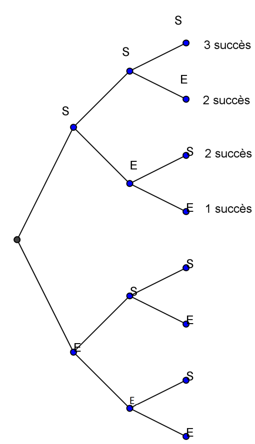
**Exemple :**
il y a indépendance lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

**Définition :**
La répétition d'une expérience aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p$, ceci $n$ fois de manière indépendante, constitue ...................... ................ ............. ........ de paramètres ....... et .......

**Propriété :**
Dans un schéma de Bernoulli, la probabilité d'une liste de résultats est .............. ................ des probabilités de chaque résultat

**Exemple de savoir faire :**

- **[Construire un arbre représentant un schéma de Bernoulli de paramètres donnés]**
On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève 3 produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité $p =$........ d'être défectueux.
On a donc un .......... ................... de paramètres ...... et .........

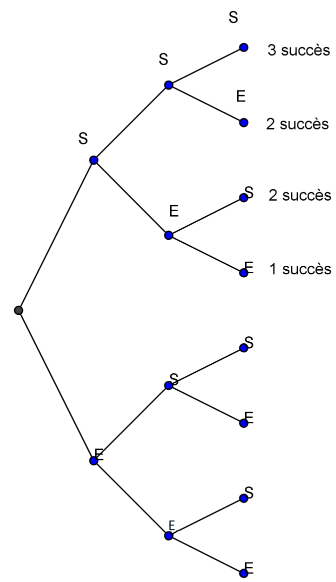



- **[Calculer la probabilité d'un événement représenté par un chemin sur un arbre pondéré]**
Sur l'arbre ci-dessus représentant un schéma de Bernoulli de paramètres ........ et ........, la probabilité d'avoir les deux premières expériences qui donnent un succès et la dernière qui donne un échec est ........................... ................
soit 0,2 % de chances d'avoir deux produits défectueux sur les trois prélevés.

# 3 Loi binomiale

**Définition et propriété :**
Soient $n$ et $k$ deux entiers naturels avec $k \leq n$. On note $\binom{n}{k}$ (on dit « $k$ sous $n$ ») le nombre de manières d'obtenir ...... succès et ....... échecs pour ....... répétitions indépendantes de la même expérience de Bernoulli.

**Exemple :**




$\binom{3}{3} = 1$ : il y a une seule manière d'obtenir 3 succès lors de la répétition de 3 épreuves identiques indépendantes.
$\binom{3}{2} = 3$ : il y a trois manières d'obtenir 3 succès et un échec lors de la répétition de 4 épreuves identiques indépendantes ($SSE$ ; $SES$ ; $ESS$).

**Définition :**
On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$. On répète $n$ fois ($n \geq 1$) cette expérience indépendamment et on note $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. On dit alors que la variable aléatoire $X$ suit une loi *binomiale* de paramètres $n$ et $p$ et on note $X \sim \mathcal{B}(n;p)$.

**Propriété :**
Si $X$ est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$, alors la probabilité d'obtenir $k$ succès avec $k \in \{0;1;2;...;n\}$ est

....

.

**Preuve :**
Il y a $\binom{n}{k}$ manières d'obtenir $k$ succès dans $n$ répétitions d'expériences identiques et indépendantes. La probabilité de chacune de ces événements qui sont évidemment incompatibles est ................ d'où le résultat.

**Exemple de savoir faire :**
**[Calculer la probabilité de $P(X = k)$ où $X$ suit une loi binomiale à partir d'un arbre pondéré]**
On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n =$ ... et $p =$ ..... La variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n =$ .... et $p =$ ......
On a $P(X = 2) =$............... .................
car trois chemins permettent d'obtenir deux succès c'est à dire deux objets défectueux.
D'où $P(X = 2) =$................ ..................... ...............
donc $P(X = 2) =$................... .....................
soit une probabilité très faible de 0,007 d'avoir deux produits défectueux.

**Calcul pratique de $P(X = k)$ et $P(X \leq k)$ :**
Soit $X$ une variable aléatoire de paramètres $n$ et $p$. Pour $k$ allant de 0 à $n$, pour calculer $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$, on utilise une calculatrice :

- Sur Texas instrument : aller dans le menu [2nd] [distrib], choisir [binomFdp] et taper [n] [,] [p] [,] [k] [)] pour calculer $P(X = k)$ et choisir [binomFRép] et taper [n] [,] [p] [,] [k] [)] pour calculer $P(X \leq k)$.
- Sur Casio : aller dans le menu [STAT] puis [DIST] puis [BINM]. Sélectionner alors [Bpd] puis [Var] pour variable, puis entrer alors $k$ dans la ligne « x », $n$ dans la ligne « numtrial » et $p$ dans la ligne « p » puis aller sur « execute » pour valider et calculer ainsi $P(X = k)$. Pour le calcul de $P(X \leq k)$, on utilisera [Bcd] au lieu de [Bpd].

**Exemple de savoir faire :**
**[Calculer $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$ où $X$ suit une loi binomiale à l'aide d'une calculatrice]**
On considère une variable aléatoire $X$ suivant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,4$.
Sur TI, la probabilité $P(X \leq 3)$ est donnée par `binomFrép(4,0.4,3)`.

**Remarques :**

- On a $P(X < 3) = P(X \leq ....)$
- pour calculer $P(X > k)$, on calcule ..............c.

**Propriété :**
Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$. Alors :

- $E(X) =$...... ;
- $V(X) =$..........

**Preuve :**
Admise

**Algorithmique :**
Algorithme de simulation d'une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

**Données** : $p$ : nombre décimal entre 0 et 1 ; $n$ : entier naturel ;
**Début traitement**
  $c$ prend la valeur ..... ;
  **pour** $k$ *de 1 jusque* ..... **faire**
    $t$ prend une valeur aléatoire décimale entre 0 inclus et 1 exclu ;
    **si** ...... **alors**
      $c$ prend la valeur de ....... ;
    **fin**
  **fin**
**Fin**
**Sorties** : $c$

# 4 Coefficients binomiaux

**Propriétés :**

- $\binom{n}{k} = \binom{.....}{.....}$ ;
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} =$..........

**Triangle de Pascal :**

Le triangle de Pascal, du nom de Blaise Pascal, mathématicien français du XVII$^{e}$ siècle qui le« redécouvra » en Occident (car il était connu avant en Orient et au Moyen-Orient) est une disposition permettant de visualiser et de calculer les coefficients binomiaux et qui s'appuie sur la formule précédente.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\binom{0}{0} = 1$ | | | | | |
| $\binom{1}{0} = 1$ | $\binom{1}{1} = 1$ | | | | |
| $\binom{2}{0} = 1$ | $\binom{2}{1}$ = .... | 1 | | | |
| $\binom{3}{0} = 1$ | $\binom{3}{1}$ =.... | .... | 1 | | |
| 1 | .... | .... | .... | 1 | |
| 1 | .... | .... | .... | .... | 1 |

Explication de la construction : le nombre de la ligne $n$ et de la colonne $k$ est le coefficient binomial $\binom{n-1}{k-1}$. Il est obtenu en ajoutant le nombre situé au dessus (ligne $n-1$ et colonne $k$) au nombre de la colonne et de la ligne précédente (ligne $n-1$ et colonne $k-1$).
Par exemple, $\binom{3}{1} = 3$ est la somme de $\binom{2}{1} = 2$ et de $\binom{2}{0} = 1$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 1 | 1 | | | | |
| 1 | ... | ... | | | |
| 1 | ... | ... | 1 | | |
| 1 | ..... | .... | .... | 1 | |
| 1 | ..... | ..... | .... | ..... | 1 |