Applications de la dérivation, cours, première S

F.Gaudon

4 mars 2016

Table des matières

1 Signe de la dérivée et variations de la fonction

1.1 Du sens de variation au signe de la dérivée

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$;
- si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$;
- si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.

Preuve :

Soit $a \in I$ et $h \in I$ tel que $a + h \in I$ et $h \neq 0$.

Supposons que f est croissante sur I (les deux autres cas se justifient par la même méthode). On a alors $f(a+h) - f(a) \geq 0$ si $h > 0$ et $f(a+h) - f(a) \leq 0$ si $h < 0$.

D'où

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$$

si $h > 0$ et

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$$

si $h < 0$.

Par conséquent, quand h devient infiniment petit, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ reste positif et sa limite $f'(a)$ aussi.

Exemple :

[Passer du tableau de variations de la fonction au tableau de signes de la dérivée]

Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ et telle que :

x	-3		-1		0		5
variations de $f(x)$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Alors la fonction dérivée f' a pour tableau de signes :

x	-3		-1		0		5
$f'(x)$		-	0	+	0	-	

1.2 Du signe de la dérivée au sens de variation

Propriété :

- Si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$) sauf en quelques points où elle s'annule, alors f est croissante (resp. strictement croissante) sur I ;
- si pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sauf en quelques points où elle s'annule, alors f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I ;
- si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Preuve :
admis

Exemple :
[Passer du tableau de signe de la dérivée au tableau de variations de la fonction]

Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ et telle que :

x	-3		-2		0		5
signe de $f'x)$		$+$	0	-	0	$+$	

Le tableau de variations de f est :

x	-3		-2		0		5
signe de $f'x)$		$+$	0	-	0	$+$	
variations de $f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Exemples par le calcul :
[Étudier les variations d'une fonction en étudiant le signe de la fonction dérivée]

- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 5$.
  - On calcule l'expression algébrique de la fonction dérivée : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 12x^2$.
  - On étudie le signe de la fonction dérivée : pour tout réel x, $f'(x) > 0$;
  - On en déduit les variations de la fonction f : par conséquent, f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4}{2x+3}$ pour tout x appartenant à $[3; +\infty[$.
  On a $f'(x) = -\frac{8}{(2x+3)^2}$.

Pour tout x appartenant à $[3;+\infty[$, le carré $(2x+3)^2$ est toujours positif donc $f'(x) < 0$
Donc f est décroissante strictement sur $[3;+\infty[$.

- Soit f la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 6x + 7$.
  $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $6x + 7 \geq 0$ c'est à dire $x \geq \frac{-7}{6}$.
  On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{-49}{12}$	$\nearrow$	

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
  Pour tout réel $x \neq 0, f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.
  On a donc le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	$\|$	-	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

1.3 Dérivée, extrema et tableau de variation

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

- Dire que $f(x_0)$ est un *maximum local* (resp. *minimum local*) de f siginifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout x de J, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
- Un minimum local ou un maximum local est appelé un extremum local.

Propriété :

Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ouvert (c'est à dire de la forme $]a;b[$)

- Si f admet un maximum local ou un minimum local en $x_0 \in I$ avec x_0, alors $f'(x_0) = 0$;
- si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet en x_0 un extremum local.

Preuve :

Supposons que f admet un maximum local en x_0 appartenant à I. Alors pour tout x appartenant à I et inférieur strictement à x_0, on a $f(x) - f(x_0) \geq 0$ et $x - x_0 < 0$. D'où $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$ et quand x tend vers x_0, on obtient $f'(x_0) \geq 0$. Par contre, pour tout x appartenant à I et supérieur strictement à x_0 on a $f(x) - f(x_0) \geq 0$ et $x - x_0 > 0$ donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ donc quand x tend vers x_0 on obtient $f'(x_0) \leq 0$. Par conséquent, $f'(x_0) = 0$. La deuxième partie de propriété est admise.

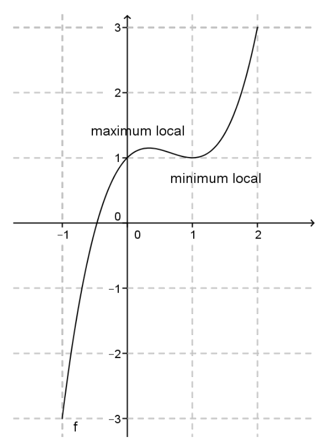
Visualisation :

Cas d'un minimum :

x		x_0	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

Cas d'un maximum :

x		x_0	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$



Remarque :

On peut avoir $f'(a) = 0$ pour un réel a appartenant à I sans que f n'admette d'extremum local en a. Par exemple, pour $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum en 0.