Suites numériques, cours, première S

F.Gaudon

7 juin 2009

Table des matières

1 Notion de suite **2**
1.1 Définitions . . . 2
1.2 Méthodes de construction des suites . . . 2
1.2.1 Définition explicite . . . 2
1.2.2 Définition par récurrence . . . 3
1.3 Sens de variation . . . 3

2 Suites arithmétiques **4**
2.1 Propriétés des suites arithmétiques . . . 4
2.2 Somme des n premiers termes . . . 4

3 Suites géométriques **5**
3.1 Propriétés des suites géométriques . . . 5
3.2 Somme des n premiers termes . . . 6

1 Notion de suite

1.1 Définitions

Définition :

On appelle *suite* toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto 3n^2 + 4 \end{aligned}$$

On a $u_0 = 3 \times 0^2 + 4 = 4$, $u_1 = 3 \times 1^2 + 4 = 7$, $u_5 = 3 \times 5^2 + 4 = 79$.

Définition :

- L'image de n par la suite u est notée u_n ou $u(n)$.
- u_n est appelé *terme* de la suite
- La suite u est notée $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ ou $(u_n)_n$.

Remarque :

- Si u_0 est le premier *terme* de la suite, u_n est le $n + 1^{\text{e}}$ terme.
- Si u_1 est le premier *terme* de la suite, u_n est le n^{e} terme.

1.2 Méthodes de construction des suites

1.2.1 Définition explicite

Définition :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, on définit une suite $(u_n)_n$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

Exemple :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n = 3n \end{aligned}$$

On a $u_0 = 3 \times 0 - 2 = -2$ et $u_1 = 3 \times 1 - 2 = 1$ et $u_6 = 3 \times 6 - 2 = 16$.

1.2.2 Définition par récurrence

Définition :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Une suite définie par *récurrence* est une suite définie par la donnée de son premier terme u_p où p est un entier naturel et par la relation pour tout n entier naturel tel que $n \geq p$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple :

$$u_n = \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$$

On a $u_1 = 3 \times 4 - 2 = 10$, $u_2 = 3 \times 10 - 2 = 28$ et $u_3 = 3 \times 28 - 2 = 82$.

1.3 Sens de variation

Définition :

- Une suite $(u_n)_n$ est *croissante* si pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n > 0$.
- Une suite $(u_n)_n$ est *décroissante* si pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n < 0$.

Propriété :

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

- Si f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$ telle que pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$, alors
  - si f est décroissante sur $[0; +\infty[$, la suite (u_n) est décroissante ;
  - si f est croissante sur $[0; +\infty[$, la suite (u_n) est croissante.
- Si pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif, alors :
  - si pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite (u_n) est croissante ;
  - si pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Preuves :
Immédiat

2 Suites arithmétiques

2.1 Propriétés des suites arithmétiques

Définition :

Soit r un nombre réel. On appelle *suite arithmétique* de *raison* r toute suite définie par son premier terme et pour tout entier naturel n par la relation :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Propriété (reconnaissance) :

Une suite $(u_n)_n$ est arithmétique si et seulement si pour tout entier n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante est alors la raison de la suite.

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r, alors :
- si le premier terme est u_0, alors pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$;
- si le premier terme est u_1, alors pour tout entier n, $u_n = u_1 + (n-1)r$.

De manière plus générale, pour tous les entiers naturels n et p avec $p < n$ on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Propriété (sens de variation) :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
- Si pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n > 0$ c'est à dire $r > 0$ alors $(u_n)_n$ est croissante ;
- si pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n < 0$ c'est à dire $r < 0$ alors $(u_n)_n$ est décroissante ;
- si $r = 0$ alors (u_n) est constante.

2.2 Somme des n premiers termes

Propriété :

- Pour tout entier naturel n,

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

- Pour toute suite arithmétique $(u_n)_n$ et tout entier naturel n :

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

ou pour tout entier naturel $p<n$,

$$u_p+u_2+\ldots+u_n=\frac{\text{nombre de termes}\times(\text{premier terme}+\text{dernier terme})}{2}$$

Preuve :

- On a

$$\begin{aligned}
&(1+2+3+\ldots+n)+(1+2+3+\ldots+n)\\
&=(1+2+3+\ldots+n)+(n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1)\\
&=(1+n)+(2+(n-1))+(3+(n-2))+\ldots+((n-1)+2)+(n+1)\\
&=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)+(n+1)\\
&=n(n+1)
\end{aligned}$$

donc $2(1+2+3+\ldots+n)=n(n+1)$ d'où le résultat.

- On a

$$\begin{aligned}
&u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+u_n\\
&=u_0+(u_0+r)+(u_0+2r)+\ldots+(u_0+(n-1)r)+(u_0+nr)\\
&=(n+1)u_0+(r+2r+3r+\ldots+(n-1)r+nr)\\
&=(n+1)u_0+r(1+2+3+\ldots+(n-1)+n)\\
&=(n+1)u_0+r\frac{n(n+1)}{2}\\
&=\frac{2(n+1)u_0+rn(n+1)}{2}\\
&=(n+1)\frac{u_0+u_0+nr}{2}\\
&=(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}
\end{aligned}$$

3 Suites géométriques

3.1 Propriétés des suites géométriques

Définition :

Soit q un réel. On appelle suite *géométrique* de *raison* q toute suite définie par son premier terme u_0 (ou u_1) et telle que pour tout entier naturel $n \geq 0$ (ou $n \geq 1$) :

$$u_{n+1} = qu_n$$

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q et de premier :
- u_0, alors $u_n = q^n u_0$;
- u_1, alors $u_n = q^{n-1} u_1$.

De manière plus générale, si p et n sont des entiers naturels tels que $p < n$, on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Propriété (reconnaissance) :

Une suite $(u_n)_n$ est géométrique si pour tout entier n, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Sa valeur est alors la raison q de la suite.

Propriété (sens de variation) :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_p > 0$ où p est un entier naturel.
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante ;
- si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante ;
- si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante

Preuve :

On a pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = u_p q^{n+1-p} - u_p q^{n-p} = u_p q^{n-p}(q-1)$.

u_p et q étant positifs, $u_{n+1} - u_n$ est donc du signe de $q - 1$ d'où le résultat.

3.2 Somme des n premiers termes

Propriété :

Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, alors :
- si $q \neq 1$, $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q}$;
- si $q = 1$, $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)u_0$.

Preuve :

On a

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_{n+1}$$
$$= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + u_0 \times q^3 + \ldots + u_0 \times q^{n-1} + u_0 \times q^n$$
$$= u_0(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n)$$

Or, pour tout réel $q \neq 1$, $(q-1)(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n) = q^{n+1} - 1$.
Donc $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_{n+1} = u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Si $q = 1$, $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_{n+1} = u_0(1 + 1 + 1^2 + 1^3 + \ldots + 1^{n-1} + 1^n) = u_0 \times (n+1)$.