Introduction aux suites numériques, cours, première S

F.Gaudon

8 avril 2010

Table des matières

1 Notion de suite **2**
1.1 Définitions 2
1.2 Méthodes de construction des suites 2
1.2.1 Définition explicite 2
1.2.2 Définition par récurrence 3

2 Suites numériques particulières **4**
2.1 Suites arithmétiques 4
2.2 Suites géométriques 4

1 Notion de suite

1.1 Définitions

Définition :

On appelle *suite* toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto 3n^2 + 4 \end{aligned}$$

On a $u_0 = 3 \times 0^2 + 4 = 4$, $u_1 = 3 \times 1^2 + 4 = 7$, $u_5 = 3 \times 5^2 + 4 = 79$.

Définition :

- L'image de n par la suite u est notée u_n ou $u(n)$.
- u_n est appelé *terme* de la suite
- La suite u est notée $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ ou $(u_n)_n$.

Remarque :

- Si u_0 est le premier *terme* de la suite, u_n est le $n+1^{\text{e}}$ terme.
- Si u_1 est le premier *terme* de la suite, u_n est le n^{e} terme.

1.2 Méthodes de construction des suites

1.2.1 Définition explicite

Définition :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, on définit une suite $(u_n)_n$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

Exemple :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n = 3n \end{aligned}$$

On a $u_0 = 3 \times 0 - 2 = -2$ et $u_1 = 3 \times 1 - 2 = 1$ et $u_6 = 3 \times 6 - 2 = 16$.

1.2.2 Définition par récurrence

Définition :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Une suite définie par *récurrence* est une suite définie par la donnée de son premier terme u_p où p est un entier naturel et par la relation pour tout n entier naturel tel que $n \geq p$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple :

$$u_n = \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$$

On a $u_1 = 3 \times 4 - 2 = 10$, $u_2 = 3 \times 10 - 2 = 28$ et $u_3 = 3 \times 28 - 2 = 82$.

Algorithmique :
Algorithme d'obtention du terme de rang n d'une suite (u_n) définie à partir d'un rang p et définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq p$.

Données : p, n, u_p
Début traitement
  u prend la valeur u_p ;
  pour k ***allant de*** $p+1$ ***à*** n **faire**
    u prend la valeur $f(u)$;
  fin
  Afficher u
Fin traitement.

Exemple :
Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = 3u_n + 2$ pour tout entier naturel n non nul et par $u_1 = 2$ n. p désigne le premier rang de la suite (1 ici), n désigne dont on cherche à calculer le terme et u désigne les différents termes de la suite (sa première valeur, 2 ici, est demandée par le programme).

<table>
<tr>
<td>TI :
Prompt P,U,N
While $P < N$
$P + 1 \triangleright P$
$3 * U + 2 \triangleright U$
End
Disp "U=",U</td>
<td>Casio :
"P" :?→ P
"U" :?→ U
"N" :?→ N
While $P < N$
$P + 1 \rightarrow P$
$3 * U + 2 \rightarrow U$
WhileEnd
"U" :U◢</td>
<td>XCas :

<code>suiterec():={local p,up,n,u,</code>
<code>saisir("Premier rang p :",p);</code>
<code>saisir("Premier terme u_p :",u);</code>
<code>saisir("Rang du terme :",n);</code>
<code>pour k de p+1 jusque n faire</code>
<code> u:=3*u+2;</code>
<code> fpour;</code>
<code>afficher("Terme de rang n",u);</code></td>
</tr>
</table>

2 Suites numériques particulières

2.1 Suites arithmétiques

Définition :

Soit r un nombre réel. On appelle *suite arithmétique* de *raison* r toute suite définie par son premier terme et pour tout entier naturel n par la relation :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r, alors :
- si le premier terme est u_0, alors pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$;
- si le premier terme est u_1, alors pour tout entier n, $u_n = u_1 + (n-1)r$.

De manière plus générale, pour tous les entiers naturels n et p avec $p < n$ on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

2.2 Suites géométriques

Définition :

Soit q un réel. On appelle suite *géométrique* de *raison* q toute suite définie par son premier terme u_0 (ou u_1) et telle que pour tout entier naturel $n \geq 0$ (ou $n \geq 1$) :

$$u_{n+1} = qu_n$$

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q et de premier :
- u_0, alors $u_n = q^n u_0$;
- u_1, alors $u_n = q^{n-1} u_1$.

De manière plus générale, si p et n sont des entiers naturels tels que $p < n$, on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$