

# Produit scalaire, cours, première S

F.Gaudon

22 février 2011

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Orthogonalité de vecteurs</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Défaut d'orthogonalité et produit scalaire</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Propriétés du produit scalaire</b>	<b>3</b>

Ce cours a été écrit d'après une recherche faite par le réseau "Ampères" de l'INRP/ADIREM initiée par la commission inter-IREM de Didactique. Il repose sur des travaux effectués par l'IREM de Clermont Ferrand par F. Barachet, G. Le Quang et R. Noirfalise publiés dans le bulletin n°485 des mois de novembre-décembre 2009 de l'APMEP.

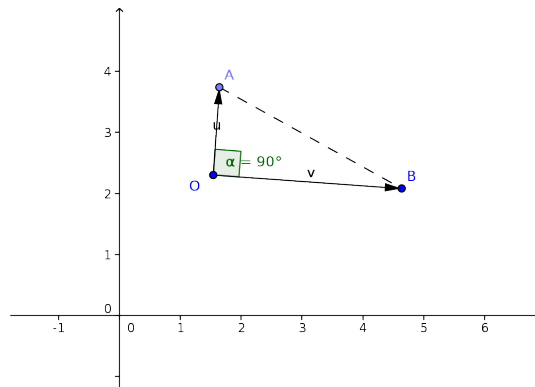
# 1 Orthogonalité de vecteurs

**Définition :**

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs.  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont *orthogonaux* si l'un des deux vecteurs est nul ou si leurs directions sont perpendiculaires.

**Propriété :**

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé. On considère les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de coordonnées respectives  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  dans ce repère. Alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $xx' + yy' = 0$ .



**Preuve :**

Supposons  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls, le cas où l'un des deux vecteurs est nul étant évident. Soient  $A$  et  $B$  deux points tels que  $\vec{u} = \vec{OA}$  et  $\vec{v} = \vec{OB}$ . Les deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si le triangle  $OAB$  est rectangle en  $O$  c'est à dire  $OA^2 + OB^2 = AB^2$  d'après le théorème de Pythagore ce qui s'écrit encore  $x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$  soit  $x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2$  d'où  $2xx' + 2yy' = 0$  ou encore  $xx' + yy' = 0$ .

## 2 Défaut d'orthogonalité et produit scalaire

**Propriété et définition :**

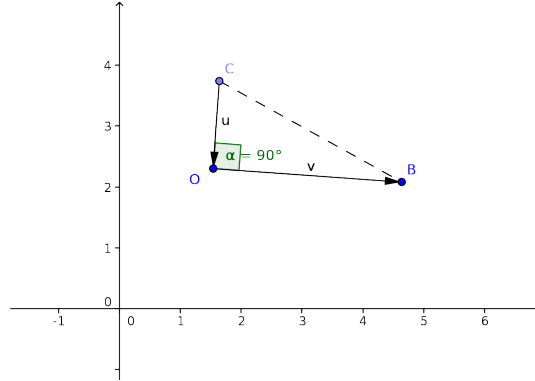
On considère les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de coordonnées respectives  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  dans un repère orthonormé  $\mathcal{R}$  et  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$  dans un autre repère orthonormé  $\mathcal{R}'$ . Alors :

- $xx' + yy' = XX' + YY' = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$  ;
- on appelle *produit scalaire* de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et on note  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  le nombre indépendant du repère orthonormé considéré :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

**Preuve :**

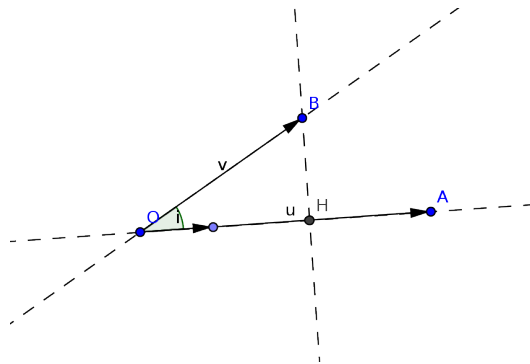
De même que précédemment, on peut supposer  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls. Soient  $C$  et  $B$  deux points tels que  $\vec{CO} = \vec{u}$  et  $\vec{OB} = \vec{v}$ . On a donc  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{CB}$  d'où  $\frac{1}{2} = (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(CB^2 - OC^2 - OB^2)$ . Dans le repère  $\mathcal{R}$  ceci est égal à  $\frac{1}{2}((x - x')^2 + (y - y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)) = 2xx' + 2yy'$  et dans le repère  $\mathcal{R}'$  c'est égal à  $2XX' + 2YY'$  d'où le résultat et la formule annoncée.



### 3 Propriétés du produit scalaire

**Propriété :**

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls et  $O, A$  et  $B$  des points tels que  $\vec{u} = \vec{OA}$  et  $\vec{v} = \vec{OB}$ . On note  $\theta$  une mesure de  $(\vec{OA}; \vec{OB})$ .  
Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB \times \cos(\theta) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$


**Preuve :**

On considère le repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$  tel que  $\vec{i}$  et  $\vec{OA}$  soient colinéaires de même sens.  $\vec{OB}$  a alors pour coordonnées polaires  $(OB, \theta)$  dans le repère polaire  $(O; \vec{i})$  c'est à dire que  $\vec{OB}$  a pour coordonnées cartésiennes  $(OB \cos(\theta); OB \sin(\theta))$ .  $\vec{OA} = OA\vec{i}$  donc  $\vec{OA}$  a pour coordonnées cartésiennes  $(OA; 0)$ . On a donc  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \cos(\theta) + 0 \times OB \sin(\theta)$  d'où le résultat.

**Propriété :**

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls et  $O, A$  et  $B$  trois points tels que  $\vec{u} = \vec{OA}$  et  $\vec{v} = \vec{OB}$ . Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $B$  sur  $(OA)$ . Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$$

**Preuve :**

Avec les notations précédentes,  $OH = OB \cos(\theta)$  donc  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OH$ .

**Propriété :**

Pour tous les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  et pour tous les nombres réels  $k$ , on a :

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ ;
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

**Preuve :**

Dans un repère orthonormé,  $\vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  et  $\vec{w}$ ,  $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ .

Donc  $\vec{v} + \vec{w}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \end{pmatrix}$  et  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} x(x' + x'') \\ y(y' + y'') \end{pmatrix}$ .

Par ailleurs,  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} xx' \\ yy' \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} xx'' \\ yy'' \end{pmatrix}$  donc  $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} xx' + xx'' \\ yy' + yy'' \end{pmatrix}$  ce qui assure la première égalité.

On montre de même la deuxième égalité.

**Propriété et définition :**

Le produit scalaire de  $\vec{u}$  par lui-même  $\vec{u} \cdot \vec{u}$  est noté  $\vec{u}^2$  et on a  $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ .

En outre, si  $O$  et  $A$  sont deux points tels que  $\vec{OA} = \vec{u}$ , on a  $\vec{OA}^2 = \|\vec{OA}\|^2 = OA^2$ .

**Preuve :**

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{OA}\|^2 = OA^2$$