Fonctions dérivées, cours, première S

1 Fonction dérivée

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est dite *dérivable sur I* si ....
La fonction qui, à tout réel a, associe le nombre dérivé $f'(a)$ en a, est appelée .... de f et notée f'.

1.1 Dérivées de fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$
k	....	$\mathbb{R}$
x	....	$\mathbb{R}$
$mx+p$	....	$\mathbb{R}$
x^2	.....	$\mathbb{R}$
x^n	......	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	....	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	....	$]0;+\infty[$
$\cos(x)$	....	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	....	$\mathbb{R}$

Preuves :
Pour tout $a \in I$ et tout $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$ on a :

- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = ...$
  d'où la dérivée de $x \mapsto k$ est .... en tout réel a ;
- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = ...$
  d'où la dérivée de $x \mapsto x$ est .... en tout réel a ;
- $\frac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h} = ...$
  d'où la dérivée de $x \mapsto mx+p$ est .... ;
- $\frac{(a+h)^2-a^2}{h} = ...$
  qui tend vers .... quand h tend vers 0 ;
- $\frac{(a+h)^n-a^n}{h} = ...$
  qui tend vers .... quand h tend vers 0 ;

- pour la fonction inverse,

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} &= \frac{\frac{a}{a(a+h)}-\frac{a+h}{a(a+h)}}{h}\\ &= \frac{a-(a+h)}{ah(a+h)}\\ &= \frac{-1}{a(a+h)}\end{aligned}$$

  qui tend vers $\frac{-1}{a^2}$ quand h tend vers 0.
- pour la fonction racine carrée,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} &= \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}\\ &= \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}\\ &= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\end{aligned}$$

  qui tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ quand h tend vers 0.
- dérivées de sin et cos admises.

2 Opérations sur les fonctions dérivables

2.1 Somme

Propriété :

> Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, alors $u+v$ est définie et dérivable sur I et :
>
> ....

Preuve :
$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \dots$
qui tend vers $u'(a)+v'(a)$ quand h tend vers 0.

Exemple :
$x \mapsto \frac{1}{x}+x^4$ a pour fonction dérivée $x \mapsto$ .... pour tout réel x non nul.

2.2 Multiplication par un nombre réel k

Propriété :

> Soient u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel, alors ku est définie et dérivable sur I et :
>
> ....

Preuve :
Même raisonnement que précédemment.

Exemple :
$x \mapsto 3x^5 - 3x^2 + 3$ a pour fonction dérivée $x \mapsto$ .... c'est à dire $x \mapsto$ .... pour tout réel x.

2.3 Produit

Propriété :

> Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, alors uv est dérivable sur I et
>
> ....

Preuve :

$$\begin{aligned}\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} &= \ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

qui tend vers .... quand h tend vers 0.

Exemple :
On considère $f : x \mapsto (3x-2)\cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$. On pose $u(x) =$ .... et $v(x) =$ .... Alors $u'(x) =$ .... et $v'(x) =$ .... et $f'(x) =$ .... pour tout réel x.

2.4 Quotient

Propriété :

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, avec pour tout x de I, $v(x) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est définie et dérivable sur I et

....

En particulier,

$$(\frac{1}{v})' = \text{....................}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{u}{v}(a+h) - \frac{u}{v}(a)}{h} &= \frac{\frac{u(a+h)}{v(a+h)} - \frac{u(a)}{v(a}}{h} \\
&= \frac{\frac{u(a+h)}{v(a+h)} - \frac{u(a+h)}{v(a)} + \frac{u(a+h)}{v(a)} - \frac{u(a)}{v(a)}}{h} \\
&= \frac{u(a+h)(\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}) + \frac{1}{v(a)}(u(a+h) - u(a))}{h} \\
&= u(a+h)\frac{v(a) - v(a+h)}{hv(a)v(a+h)} + \frac{1}{v(a)}\frac{u(a+h) - u(a)}{h} \\
&= -u(a+h)\frac{v(a+h) - v(a)}{h}\frac{1}{v(a)v(a+h)} + \frac{1}{v(a)}\frac{u(a+h) - u(a)}{h}
\end{aligned}$$

qui tend vers $\frac{-u(a)v'(a)}{v(a)v(a)} + \frac{u'(a)}{v(a)}$ c'est à dire $\frac{-u(a)v'(a)+u'(a)v(a)}{v(a)^2}$ quand h tend vers 0.

Exemple :

On considère $f : x \mapsto \frac{3x^2-x}{4-5x}$ définie pour tout réel x différent de .... On pose $u(x) =$ .... et $v(x) =$ .... Alors $u'(x) =$ .... et $v'(x) =$ .... d'où

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \text{................} \\
&= \text{.....................} \\
&= \text{.....................} \\
&= \text{....................}
\end{aligned}$$

2.5 Puissances

Propriété :

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier relatif. Alors u^n est dérivable sur I et :

....

Preuve :
Dans le cas $n = 2$, on a $u^2 = u \times u$ donc d'après la dérivation d'un produit on a $(u^2) =$ ....
Le cas $n \geq 3$ est admis.

2.6 Dérivation de fonctions composées

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Soient a et b deux réels et J l'ensemble des réels x tels que $ax + b \in I$. Alors la fonction $f : x \longmapsto u(ax + b)$ est dérivable sur J et pour tout x réel de J,

$$f'(x) = ...$$

En particulier,

$$(\cos(ax+b))' = ...$$

$$(\sin(ax+b))' = ...$$

$$(\sqrt{ax+b})' = ...$$

Preuve :
admise

Exemple :
$x \mapsto \cos(4x + 5)$ a pour fonction dérivée $x \mapsto$ ....