Barycentre, cours, première S

Ce qui suit est valable à la fois dans le plan et dans l'espace.

1 Barycentre de deux points

Théorème et définition :

Soient A et B deux points et a et b deux réels tels que $a+b \neq 0$. Il existe un unique point G du plan tel que :

....

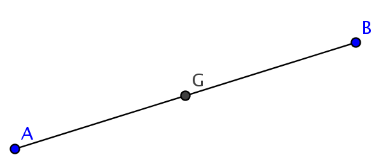
G est appelé ....

Preuve :

Si un tel point G existe alors ....
Donc ....
d'où ....
c'est à dire .... puisque $a+b \neq 0$.
S'il existe, G est donc défini de manière unique par la relation précédente. Soit donc G le point défini par $\vec{AG} = \frac{b}{a+b}\vec{AB}$. On a alors en remontant les calculs précédents on a :
.... donc ....
d'où ....
donc ....
Le point G défini par $\vec{AG} = \frac{b}{a+b}\vec{AB}$ vérifie donc bien la relation ce qui assure l'existence du barycentre.

Exemple :

G est le barycentre de $(A, 1)(B, 1)$ si et seulement si ....
En effet, ... si et seulement si .... c'est à dire ....
.... c'est à dire encore G est le barycentre de $(A, 1)(B, 1)$.



Propriété :

Si G est le barycentre de (A, a) et (B, b), alors pour tout point M du plan

....

En particulier, ...

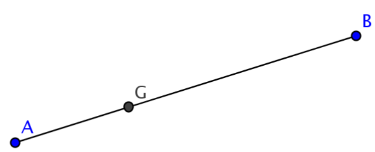
Preuve :

On a $a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} a\vec{MA} + b\vec{MB} &= .... \\ &= .... \\ &= .... \end{aligned}$$

Exemple :

Placement du barycentre G de $(A, 2)(B, 1)$.
On a pour tout point M, ... donc en particulier pour $M = A$, ... c'est à dire ....



Propriété d'homogénéité :

Si G est le barycentre de $(A, a)(B, b)$, alors pour tout réel k non nul, G est le barycentre de ....

Preuve :

Si G est le barycentre de (A, a) et (B, b), alors .... donc .... c'est à dire G est le barycentre de (A, ka) et (B, kb).

2 Barycentre de n points

Théorème et définition :

Soient A_1, A_2,..., A_n n points où n est un entier naturel et a_1, a_2,..., a_n n réels tels que .... Il existe un unique point G tel que

....

.

Preuve :
Identique à la preuve pour le cas $n = 2$.

Propriétés :

Soit G le barycentre du système (A_1, a_1), (A_2, a_2),...,(A_n, a_n), Alors :

- pour tout point M,

  ....

- pour tout réel k non nul, G est le barycentre de ....

Preuves :
identiques au cas du barycentre de deux points.

Définition :

le barycentre de $(A_1, 1)(A_2, 1) \ldots (A_n, 1)$ est appelé .... de A_1, A_2, A_n.

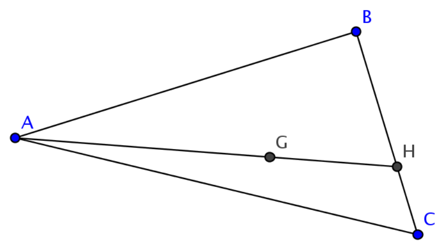
Propriété d'associativité :

Soit G le barycentre de trois points pondérés $(A, a)(B, b)(C, c)$. Supposons $a + b \neq 0$. Soit H le barycentre de $(A, a)(B, b)$. Alors G est le barycentre de ....

Preuve :
$a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = \vec{0}$. H est le barycentre de $(A, a)(B, b)$ donc pour tout point M, ... D'où pour $M = G$, $a\vec{GA} + b\vec{GB} =$ .... D'où $(a+b)\vec{GH} + c\vec{GC} =$ .... c'est à dire G est le barycentre $(H, a + b)$ et (C, c).

Exemple :

Soit G le barycentre de $(A,3)(B,2)(C,4)$. Alors si H est le barycentre de $(B,2)(C,4)$ on a $\vec{BH} =$ .... G est le barycentre de $(A,3)(H,6)$ donc $\vec{AG} =$ .... ce qui permet de construire G.



Conséquence :

> Si G est le barycentre de $(A,a)(B,b)(C,c)$ alors, lorsque $b+c \neq 0$, (AG) et (BC) sont sécantes en un point H qui est le barycentre de $(B,b)(C,c)$.

Preuve :

Si K est le barycentre de $(B,b)(C,c)$, $K \in (BC)$ mais aussi par le théorème d'associativité, G est le barycentre de $(A,a)(K,b+c)$ donc $K \in (AG)$. D'où K est l'intersection de (BC) et (AG) c'est à dire $K = H$.

3 Coordonnées de barycentres

Propriété :

> Soit G le barycentre de n points pondérés $(A_1,a_1)(A_2,a_2)\dots(A_N,a_n)$ de coordonnées $A_i(x_i;y_i)$ pour $i \in \{1;\dots;n\}$. Alors :
>
> $$x_G = \text{..................................}$$
>
> et
>
> $$y_G = \text{..................................}$$

Exemples :

- Coordonnées du milieu I d'un segment $[AB]$: I est le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$ donc .... et .... ;
- coordonnées du centre de gravité G d'un triangle ABC : G est le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$ donc $x_G =$............. .... et $y_G =$.............. ....